Tietokoneharjoitus 3

P1, syksy 2011

Tässä harjoituksessa käsitellään integraalilaskentaa ja täydennetään aikaisemmin esillä olleita esimerkkejä tietorakenteista: jonoista ja listoista. Lopuksi voi tutustua matriiseihin, jos jää aikaa.

Huom: Jos viime kerran tehtävä 3 jäi tekemättä, kannattaa käydä se aluksi läpi Noppa-sivun malliratkaisujen avulla.

Integraalit

Esimerkkejä: (käy läpi antamalla käskyt)

> $int(\sin(x)\cdot\exp(2\cdot x), x)$

$$-\frac{1}{5}\cos(x)\,e^{2x}+\frac{2}{5}\sin(x)\,e^{2x} \tag{1.1}$$

> $int(\sin(x)\cdot\exp(2\cdot x), x = 0..\mathrm{Pi})$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{5}e^{2\pi} \tag{1.2}$$

> $int(\exp(-x^2), x)$ *# integraalifunktio on erikoisfunktio erf = error function*

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}(x) \tag{1.3}$$

> ?erf

> $int(\exp(-x^2), x = -infinity..infinity)$

$$\sqrt{\pi} \tag{1.4}$$

> $int(\sin(\ln(x)+\exp(x)), x = 0..1)$ *# ei osaa laskea edes erikoisfunktioiden avulla!*

$$\int_0^1 \sin(\ln(x)+e^x)\,dx \tag{1.5}$$

> $evalf(int(\sin(\ln(x)+\exp(x)), x = 0..1))$

$$0.3890760796 \tag{1.6}$$

Tehtävä: Laske epäolleellisten integraalien $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ ja $\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx$ tarkat arvot.

Ovatko vastaavat integraalifunktiot alkeisfunktioita?

> $int\left(\frac{\sin(x)}{x}, x = 0..infinity\right)$

$$\frac{1}{2}\pi \tag{1.7}$$

> $int(\sin(x^2), x = 0..infinity)$

$$\frac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt{\pi} \tag{1.8}$$

> $int\left(\frac{\sin(x)}{x}, x\right)$

$$\mathrm{Si}(x) \qquad (1.9)$$

> ?Si

> $int(\sin(x^2), x)$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{\pi}\,\mathrm{FresnelS}\left(\frac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{\pi}}\right) \qquad (1.10)$$

Integraalifunktiot eivät ole alkeisfunktioita.

Ketjukäyrä

Tehtävässä käsitellään ketjukäyrää eli katenaaria, joka kuvaa päistään kiinnitetyn narun muotoa. Galilei uskoi, että käyrän muotoa kuvaa paraabeli, mutta Huygens, Bernoulli ja Leibniz keksivät oikean ratkaisun, joka liittyy cosh-funktioon.

Käy aluksi läpi seuraava esimerkki, jossa muodostetaan (väärä) ratkaisu paraabelin avulla, kun narun pituus on 6 ja kiinnityspisteet ovat (0,1) ja (3,2).

> *restart*

> $g := x \rightarrow A \cdot x^2 + B \cdot x + C$

$$g := x \rightarrow A\,x^2 + B\,x + C \qquad (2.1)$$

> $Reunaehdot := g(0) = 1, g(3) = 2$

$$Reunaehdot := C = 1, 9\,A + 3\,B + C = 2 \qquad (2.2)$$

> $Pituusehto := int(\mathrm{sqrt}(1 + diff(g(x), x)^2), x = 0..3) = 6$

$$Pituusehto := \frac{1}{4}\,\frac{1}{A}\Big(\Big(-\sqrt{1+B^2}\,\mathrm{csgn}(A)\,B - \ln\big(\big(B+\sqrt{1+B^2}\,\mathrm{csgn}(A)\big)\,\mathrm{csgn}(A)\big) + \sqrt{1+36\,A^2+12\,A\,B+B^2}\,\mathrm{csgn}(A)\,B + \ln\big(\big(B+6\,A + \sqrt{1+36\,A^2+12\,A\,B+B^2}\,\mathrm{csgn}(A)\big)\,\mathrm{csgn}(A)\big) + 6\sqrt{1+36\,A^2+12\,A\,B+B^2}\,\mathrm{csgn}(A)\,A\Big)\,\mathrm{csgn}(A)\Big) = 6 \qquad (2.3)$$

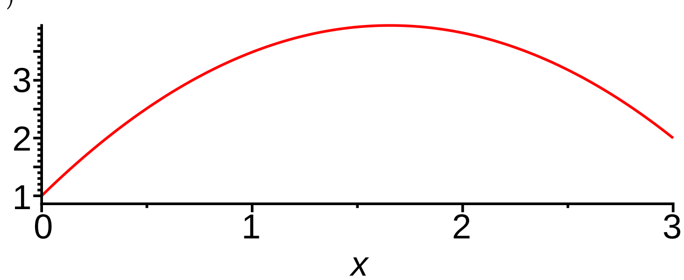
csgn(A) tarkoittaa luvun A etumerkkiä +1 tai -1, jota ohjelma ei tiedä.

> $fsolve(\{Reunaehdot, Pituusehto\})$

$$\{A = -1.077106130, B = 3.564651723, C = 1.000000000\} \qquad (2.4)$$

> $assign(\%)$ *# kiinnitetään vakiot edellisestä tuloksesta*

> $plot(g(x), x = 0..3)$



Ei vastaa havaintoja: vakion A pitäisi olla positiivinen => ylöspäin aukeava paraabeli.

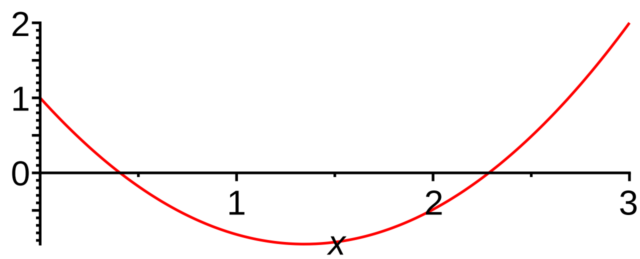
> $A := 'A': B := 'B': C := 'C':$ # *poistetaan vakioiden arvot ja ratkaistaan*
uudelleen (restart poistaa myös g:n)

> $fsolve(\{Reunaehdot, Pituusehto\}, \{A, B, C\}, A = 0..10)$

$$\{A = 1.077106130, B = -2.897985057, C = 1.000000000\} \quad (2.5)$$

> $assign(\%)$

> $plot(g(x), x = 0..3)$



Näyttää paremmalta, mutta paraabeli oli väärä malli jo alunperin.
Tehtävä: Toista vastaavat laskut oikealla lausekkeella, joka
on muotoa

> $f := x \rightarrow \frac{1}{a} \cdot \cosh(a \cdot (x - b)) + c$

$$f := x \rightarrow \frac{\cosh(a\ (x-b))}{a} + c \quad (2.6)$$

Integraalin laskeminen riippuu nyt vakioiden etumerkeistä;
helpotetaan asiaa:

> $assume(a > 0 \textbf{ and } b > 0)$

> $reunaehdot := f(0) = 1, f(3) = 2$

$$reunaehdot := \frac{\cosh(a\sim b\sim)}{a\sim} + c = 1, \frac{\cosh(a\sim (3 - b\sim))}{a\sim} + c = 2 \quad (2.7)$$

> $pituusehto := int\left(\mathrm{sqrt}\left(1 + diff(f(x), x)^2\right), x = 0..3\right) = 6$

$$pituusehto := \frac{1}{2} \frac{1}{\left(1 + \left(e^{a\sim b\sim}\right)^2\right) a\sim \left(\left(e^{a\sim}\right)^6 + \left(e^{a\sim b\sim}\right)^2\right)} \left(\left(-e^{9 a\sim} - e^{3 a\sim + 2 a\sim b\sim} + e^{9 a\sim + 4 a\sim b\sim} + e^{3 a\sim + 6 a\sim b\sim} + e^{12 a\sim} + e^{2 a\sim b\sim + 12 a\sim} - e^{4 a\sim b\sim} - e^{6 a\sim b\sim}\right) e^{-a\sim b\sim - 3 a\sim}\right) = 6 \quad (2.8)$$

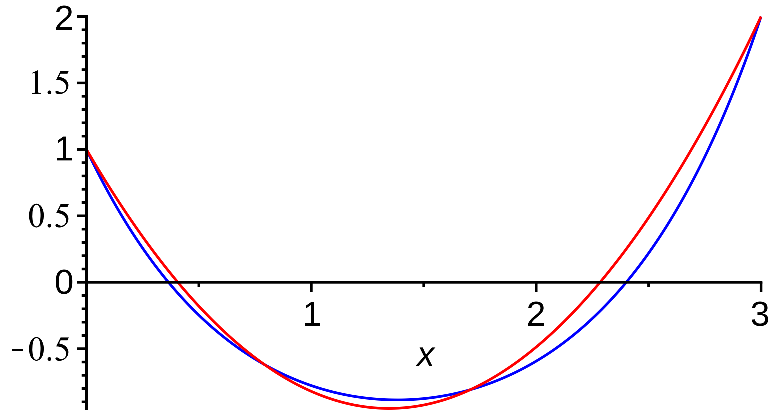
> $fsolve(\{reunaehdot, pituusehto\}, \{a, b, c\}, a = 0..2)$

$$\{a\sim = 1.434919130, b\sim = 1.382755680, c = -1.582134121\} \quad (2.9)$$

> $assign(\%)$

Kun olet saanut vakioille a, b, c "järkevät" lukuarvot, piirrä funktiot
$f(x)$ ja $g(x)$ samaan kuvaan ja vertaa tuloksia:

> $plot([f(x), g(x)], x = 0..3, color = [blue, red])$



Jonot ja listat

Tässä on tiivistettyinä jonoihin ja listoihin liittyviä operaatioita,
jotka voi käydä itsenäisesti läpi.

> $jono := seq(\ln(n), n = 1..10)$

$$jono := 0, \ln(2), \ln(3), 2\ln(2), \ln(5), \ln(6), \ln(7), 3\ln(2), 2\ln(3), \ln(10) \quad \textbf{(3.1)}$$

> $jono[5]$

$$\ln(5) \quad \textbf{(3.2)}$$

> $jono[2..4]$

$$\ln(2), \ln(3), 2\ln(2) \quad \textbf{(3.3)}$$

> $\exp(jono)$ *# ei toimi näin*

Error, (in exp) expecting 1 argument, got 10

> $lista := [jono]$

$$lista := [0, \ln(2), \ln(3), 2\ln(2), \ln(5), \ln(6), \ln(7), 3\ln(2), 2\ln(3), \ln(10)] \quad \textbf{(3.4)}$$

> $map(\exp, lista)$ *# kuvataan funktio exp listan alkioihin*

$$[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10] \quad \textbf{(3.5)}$$

> $kulmat := \left[x, seq\left(\frac{n \cdot \mathrm{Pi}}{6}, n = 0..6\right)\right]$

$$kulmat := \left[x, 0, \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{5}{6}\pi, \pi\right] \quad \textbf{(3.6)}$$

> $sini := map(\sin, kulmat)$

$$sini := \left[\sin(x), 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}, 1, \frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}, 0\right] \quad \textbf{(3.7)}$$

> $kosini := map(\cos, kulmat)$

$$kosini := \left[\cos(x), 1, \frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}, -1\right] \quad \textbf{(3.8)}$$

> $f := x \rightarrow \sin(2 \cdot x)$

$$f := x \rightarrow \sin(2x) \quad \textbf{(3.9)}$$

> $sini2 := map(f, kulmat)$

$$sini2 := \left[\sin(2x), 0, \frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\sqrt{3}, 0, -\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}, 0\right] \quad \textbf{(3.10)}$$

> $matrix([kulmat, sini, kosini, sini2])$

$$\begin{bmatrix} x & 0 & \frac{1}{6}\pi & \frac{1}{3}\pi & \frac{1}{2}\pi & \frac{2}{3}\pi & \frac{5}{6}\pi & \pi \\ \sin(x) & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 1 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ \cos(x) & 1 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -1 \\ \sin(2x) & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Matriisilaskenta

Kuten edellä, mutta nyt matriiseille:

```
> with(linalg) :
> A := matrix(3, 3, [1, 2, 3, 3, 2, 1, 1, 0, 1])
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

```
> A
```

$$A \quad (4.2)$$

Tulosta ei näytetä, ellei vaadita erikseen:

```
> evalm(A) # evalm = evaluate matrix
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

```
> det(A)
```

$$-8 \quad (4.4)$$

```
> B := inverse(A)
```

$$B := \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

```
> evalm(A&*B) # matriisien kertolaskun symboli on &*
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

```
> b := vector([1, 2, 3])
```

(4.7)

$$b := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

> *x* := *evalm*(*B*&**b*) # *ratkaistaan yhtälöryhmä Ax=b*

$$x := \begin{bmatrix} \frac{7}{4} & -\frac{9}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

> *linsolve*(*A*, *b*) # *sama helpommin*

$$\begin{bmatrix} \frac{7}{4} & -\frac{9}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$