Interpolaatiopolynomi, oma Lagrange, with(CurveFitting), virhearvio

Muodosta interpolaatiopolynomi pisteistölle, joka saadaan laskemalla funktion $\cos(1+x^2)$ arvot tasavälisessä x-pisteistössä, jossa on 7 pistettä välillä [0,3].
Piirrä samaan kuvaan funktio, datapisteet ja interpolaatiopolynomi.

Arvioi (Lagrangen) interpolaatiokaavan virhetermin avulla interpolaatiovirheen yläraja yo. välillä ja vertaa todelliseen.

Ratkaisu:

Tässä tehdään enemmän kuin pyydetään. Maplessa on valmis interpolointifunktio, joka palauttaa interpolaatiopynomin
valitsimella säädettävässä muodossa.
?curvefitting[PolynomialInterpolation]

Opettavaista on kirjoittaa oma Lagrangen interpolaation toteuttava funktio, alla lagint, jonka apufunktiona on
Lagrangen kertojapolynomin määrittelevä L.

```
> restart
> currentdir( )      # Mikä on nykyhakemisto
  "/Library/Frameworks/Maple.framework/Versions/15/bin.APPLE_UNIVERSAL_OSX"      (1.1)
> #currentdir("/m/home/home79/apiola/unix/2012kevat/maple")
       # Nykyhakemiston asetus  (cd Unix,Dos,Matlab)
> #currentdir( )
> #read("/m/home/home79/apiola/unix/2012 kevat/maple/MatC1koodit.mpl")
```

Tämä meni mystiikan puolelle, miksei toimi!

```
> #read("MatC1koodit12.mpl")
> #read(
       "/Users/heikki/Dropbox/Public/Tietokoneharjoitukset11/MatOhjelmistot/2012kevat/maple/"MatC1koodit1
```

Muuta polku, omaksesi.
Koodit ovat myös alla olevassa laatikossa, joten ei tarvitse temppuilla polkujen kanssa.
Vie osoitin laatikkoon ja CTR-E (CMD-E), [E - execute].
(Hakemistopolkujen käsittely on rajoittunutta verrattuna Matlabiin. Nähtävästi vain koko polkua voidaan käyttää (?))

```
linspace:= (a,b,n)->[seq(a+iii*(b-a)/(n-1),iii=0..n-1) ]:

# Lagrangen kertojapolynomi:
L:=proc(j,xd,x)
local oso,nimi,i,j1;
j1:=j+1;
oso:=product((x-xd[i]),i=1..nops(xd))/(x-xd[j1]);
nimi:=subs(x=xd[j1],oso);
oso/nimi;
end:

lagint:=(xd,yd,x)->add(yd[j+1]*L(j,xd,x),j=0..nops(xd)-1):
```

> $print(linspace)$

$$(a, b, n) \rightarrow \left[seq\left(a + \frac{iii\ (b-a)}{n-1}, iii = 0\,..n-1\right)\right] \quad \textbf{(1.2)}$$

> $print(lagint)$

$$(xd, yd, x) \rightarrow add\left(yd_{j+1}\ L(j, xd, x), j = 0\,..nops(xd) - 1\right) \quad \textbf{(1.3)}$$

> $lagint([a, b, c], [ya, yb, yc], x);$

$$\frac{ya\ (x-b)\ (x-c)}{(a-b)\ (a-c)} + \frac{yb\ (x-a)\ (x-c)}{(b-a)\ (b-c)} + \frac{yc\ (x-a)\ (x-b)}{(c-a)\ (c-b)} \quad \textbf{(1.4)}$$

> $with(plots):$

> $xd := linspace(0, 3, 7);$

$$xd := \left[0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3\right] \quad \textbf{(1.5)}$$

> $xd := evalf(xd);$

$$xd := [0., 0.5000000000, 1., 1.500000000, 2., 2.500000000, 3.] \quad \textbf{(1.6)}$$

> $f := x \rightarrow \cos(1 + x^2)$

$$f := x \rightarrow \cos(1 + x^2) \quad \textbf{(1.7)}$$

> $yd := f\sim(xd)$ # Tai yd:= map(f,xd)

$$yd := [0.5403023059, 0.3153223624, -0.4161468365, -0.9941296761, 0.2836621855, 0.5679241733, -0.8390715291] \quad \textbf{(1.8)}$$

>

> $p := lagint(xd, yd, x)$

$$p := 0.04802687164\ (x - 0.5000000000)\ (x - 1.)\ (x - 1.500000000)\ (x - 2.)\ (x - 2.500000000)\ (x - 3.) - 0.1681719266\ x\ (x - 1.)\ (x - 1.500000000)\ (x - 2.)\ (x - 2.500000000)\ (x - 3.) - 0.5548624485\ x\ (x - 0.5000000000)\ (x - 1.500000000)\ (x - 2.)\ (x - 2.500000000)\ (x - 3.) + 1.767341647\ x\ (x - 0.5000000000)\ (x - 1.)\ (x - 2.)\ (x - 2.500000000)\ (x - 3.) + 0.3782162472\ x\ (x - 0.5000000000)\ (x - 1.)\ (x - 1.500000000)\ (x \quad \textbf{(1.9)}$$

$- 2.500000000)\ (x - 3.) - 0.3028928924\ x\ (x - 0.5000000000)\ (x - 1.)\ (x - 1.500000000)\ (x - 2.)\ (x - 3.) - 0.07458413592\ x\ (x - 0.5000000000)\ (x - 1.)\ (x - 1.500000000)\ (x - 2.)\ (x - 2.500000000)$

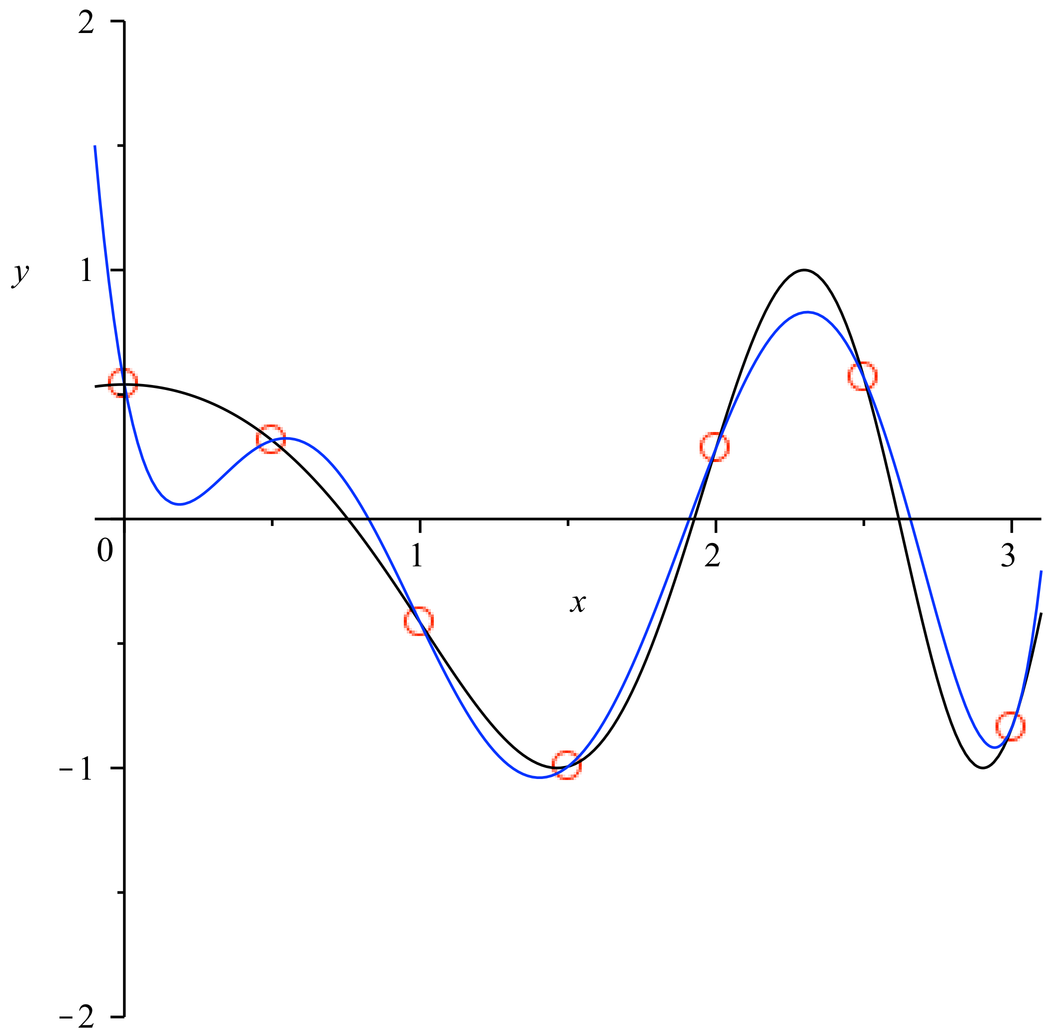
> *datakuva* := *plot*(*xd*, *yd*, *style* = *point*, *symbol* = *circle*, *symbolsize* = 20)

datakuva := *PLOT*(...) **(1.10)**

> *fkuva* := *plot*([*f*(*x*), *p*], *x* = -.1 ..3.1, *y* = -2 ..2, *color* = [*black*, *blue*])

fkuva := *PLOT*(...) **(1.11)**

> *display*(*datakuva*, *fkuva*)



Valmiilla Maple-funktiolla:

> *with*(*CurveFitting*)

[*ArrayInterpolation*, *BSpline*, *BSplineCurve*, *Interactive*, *LeastSquares*, *PolynomialInterpolation*, *RationalInterpolation*, *Spline*, *ThieleInterpolation*] **(1.12)**

> *P* := *PolynomialInterpolation*(*xd*, *yd*, *x*)

$P := 1.093073361\ x^6 - 9.689758380\ x^5 + 31.38122493\ x^4 - 44.99979274\ x^3 + 27.62003430\ x^2 - 6.361230612\ x + 0.5403023059$ **(1.13)**

> *Q* := *PolynomialInterpolation*(*xd*, *yd*, *x*, *form* = *Lagrange*)

$$Q := 0.04802687164\,(x-0.5000000000)\,(x-1.)\,(x-1.500000000)\,(x-2.)\,(x-2.500000000)\,(x-3.) - 0.1681719266\,x\,(x-1.)\,(x-1.500000000)\,(x-2.)\,(x-2.500000000)\,(x-3.) - 0.5548624487\,x\,(x-0.5000000000)\,(x-1.500000000)\,(x-2.)\,(x-2.500000000)\,(x-3.) + 1.767341646\,x\,(x-0.5000000000)\,(x-1.)\,(x-2.)\,(x-2.500000000)\,(x-3.) + 0.3782162473\,x\,(x-0.5000000000)\,(x-1.)\,(x-1.500000000)\,(x-2.500000000)\,(x-3.) - 0.3028928924\,x\,(x-0.5000000000)\,(x-1.)\,(x-1.500000000)\,(x-2.)\,(x-3.) - 0.07458413592\,x\,(x-0.5000000000)\,(x-1.)\,(x-1.500000000)\,(x-2.)\,(x-2.500000000) \quad \textbf{(1.14)}$$

> $simplify(p - Q);$

$$1.100000000\,10^{-9}\,x^6 - 1.005000000\,10^{-8}\,x^5 + 3.442500000\,10^{-8}\,x^4 - 5.418750000\,10^{-8}\,x^3 + 3.805000000\,10^{-8}\,x^2 - 9.187500000\,10^{-9}\,x \quad \textbf{(1.15)}$$

Erotuksen kertoimet ovat oletustarkkudella käyt. katsoen nollia.

Tutkitaan interpolaatiovirhettä, verrataan virhearviota todelliseen virheeseen.

> xd

$$[0., 0.5000000000, 1., 1.500000000, 2., 2.500000000, 3.] \quad \textbf{(1.16)}$$

> $nops(xd)$

$$7 \quad \textbf{(1.17)}$$

Virhekaavan osoittajassa on $f^{(7)}(\xi)$, sille haetaan yläraja välillä [0,3].

> $d7f := diff(f(x), x\$7)$

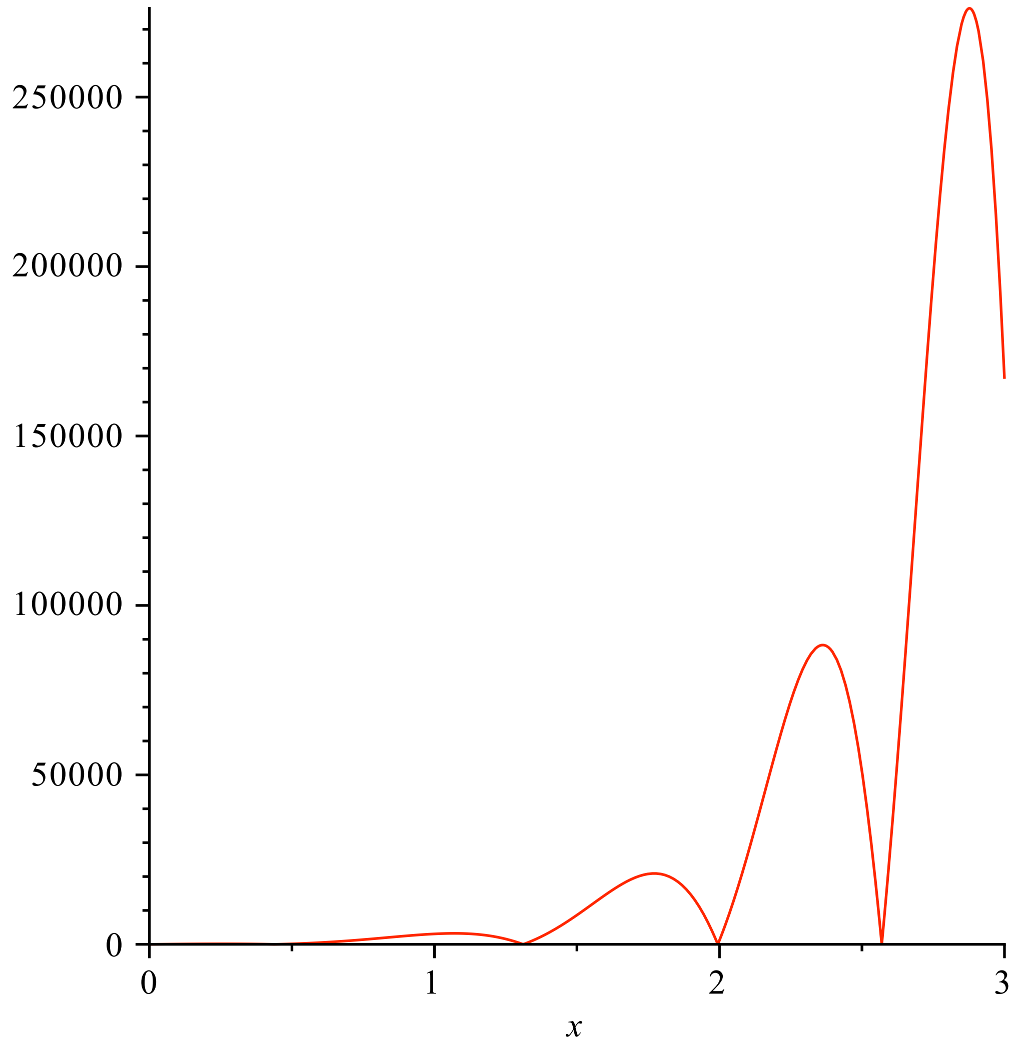
$$d7f := 128\sin(1+x^2)\,x^7 - 1344\cos(1+x^2)\,x^5 - 3360\sin(1+x^2)\,x^3 + 1680\cos(1+x^2)\,x \quad \textbf{(1.18)}$$

> $lprint(d7f)$; *# Mahd. Matlabiin siirtoa varten.*

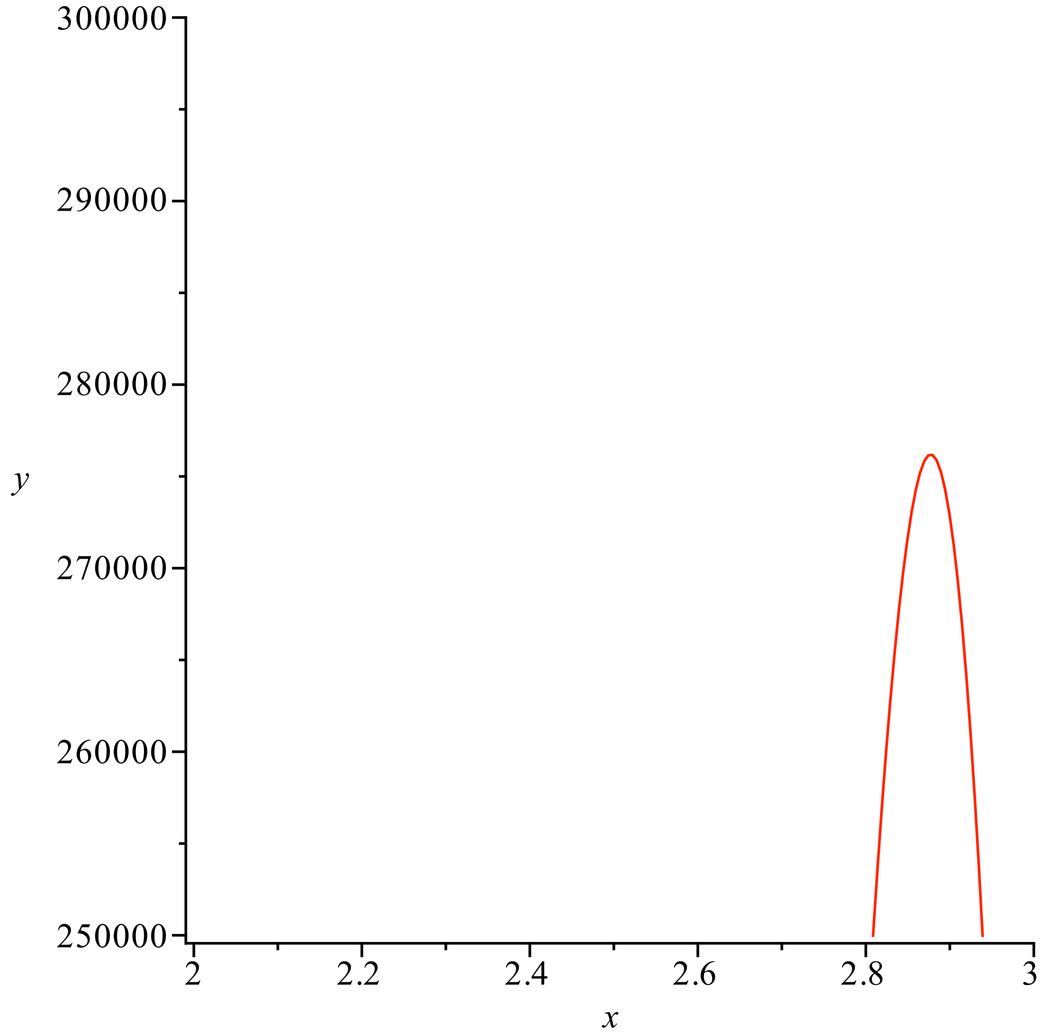
```
128*sin(1+x^2)*x^7-1344*cos(1+x^2)*x^5-3360*sin(1+x^2)*x^3+1680*
cos(1+x^2)*x
```

>

> $plot(\mathrm{abs}(d7f), x = 0..3);$



> $plot(\mathrm{abs}(d7f), x = 2..3, y = 250000..300000);$



Klikkaa kuvaa hiiren oikealla. Probe-info -> cursor position => *maxder7* ≈ 276000

> $maxder7 := 276000$

$$maxder7 := 276000 \tag{1.19}$$

> $7!$

$$5040 \tag{1.20}$$

> $kerroin := \frac{maxder7}{7!}$

$$kerroin := \frac{1150}{21} \tag{1.21}$$

> $evalf(\%)$

$$54.76190476 \tag{1.22}$$

Lasketaan tulotermin max:

> $tulo := x \rightarrow product((x - xd[j]), j = 1..7);$ *# Määritellään funktioksi.*

$$tulo := x \rightarrow \prod_{j=1}^{7} (x - xd_j) \tag{1.23}$$

> $tulo(x);$

$x\,(x-0.5000000000)\,(x-1.)\,(x-1.500000000)\,(x-2.)\,(x-2.500000000)\,(x-3.)$ **(1.24)**

> $dt := diff(tulo(x), x)$

$dt := (x-0.5000000000)\,(x-1.)\,(x-1.500000000)\,(x-2.)\,(x-2.500000000)\,(x-3.) + x\,(x-1.)\,(x-1.500000000)\,(x-2.)\,(x-2.500000000)\,(x-3.) + x\,(x-0.5000000000)\,(x-1.500000000)\,(x-2.)\,(x-2.500000000)\,(x-3.) + x\,(x-0.5000000000)\,(x-1.)\,(x-2.)\,(x-2.500000000)\,(x-3.) + x\,(x-0.5000000000)\,(x-1.)\,(x-1.500000000)\,(x-2.500000000)\,(x-3.) + x\,(x-0.5000000000)\,(x-1.)\,(x-1.500000000)\,(x-2.)\,(x-3.) + x\,(x-0.5000000000)\,(x-1.)\,(x-1.500000000)\,(x-2.)\,(x-2.500000000)$ **(1.25)**

> $nollak := solve(dt = 0);$

$nollak := 0.1609812071, 2.839018793, 0.7021089813, 2.297891019, 1.234672665, 1.765327335$ **(1.26)**

> $tulo\sim([nollak])$ *# sama kuin map(tulo,[nollak])*

[0.7487648688, -0.7487648684, -0.1808515128, 0.1808515126, 0.09655295638, -0.09655295646] **(1.27)**

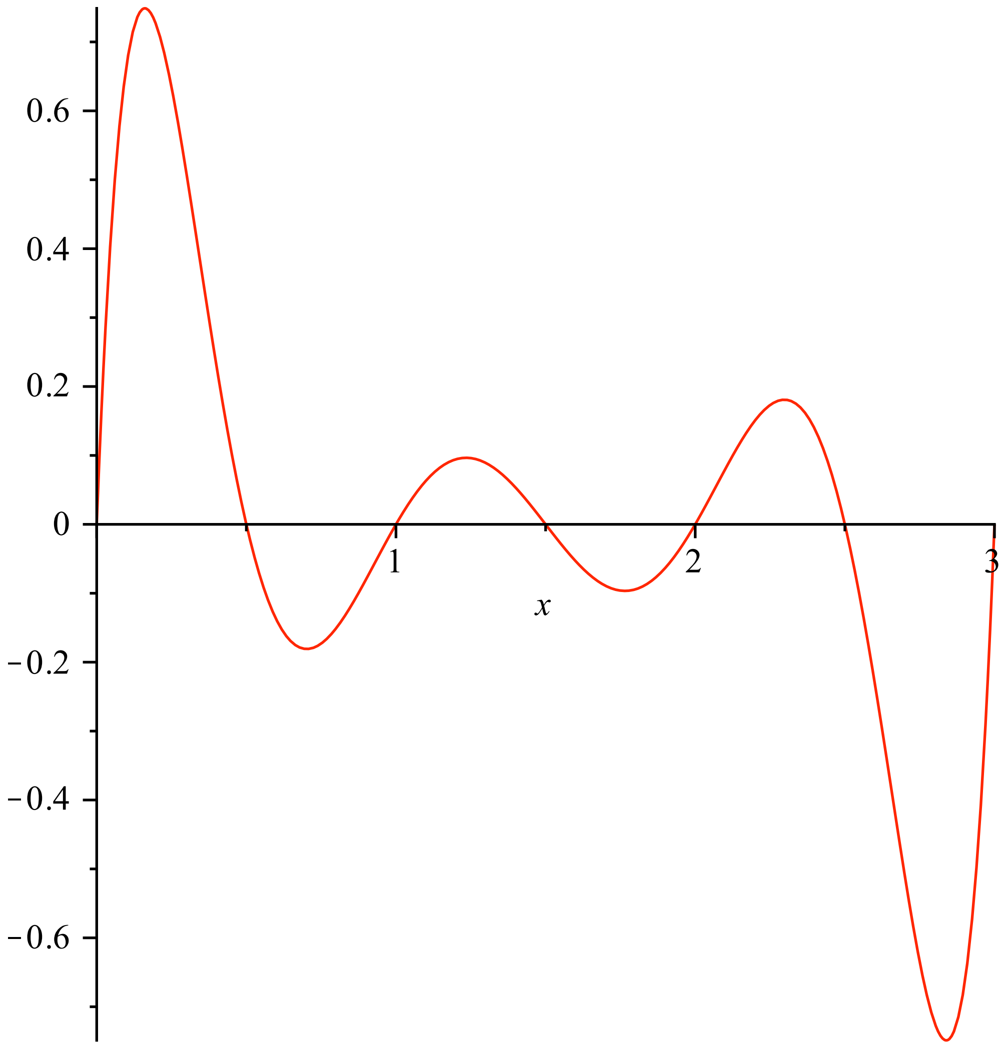
> abs~(%)

[0.7487648688, 0.7487648684, 0.1808515128, 0.1808515126, 0.09655295638, 0.09655295646] **(1.28)**

> $maxtulo := \max(\%)$

$$maxtulo := 0.7487648688 \qquad (1.29)$$

> $plot(tulo(x), x = 0..3);$



> *Maxvirhearvio* := *kerroin*·*maxtulo*

$$Maxvirhearvio := 41.00379043 \quad \textbf{(1.30)}$$

Todellinen virhe:

> *virhe* := $f(x) - p$

$$virhe := \cos\left(1 + x^2\right) - 0.04802687164\,(x - 0.5000000000)\,(x - 1.)\,(x - 1.500000000)\,(x - 2.)\,(x - 2.500000000)\,(x - 3.) + 0.1681719266\,x\,(x - 1.)\,(x - 1.500000000)\,(x - 2.)\,(x - 2.500000000)\,(x - 3.) + 0.5548624485\,x\,(x - 0.5000000000)\,(x - 1.500000000)\,(x - 2.)\,(x - 2.500000000)\,(x - 3.) - 1.767341647\,x\,(x - 0.5000000000)\,(x - 1.)\,(x - 2.)\,(x - 2.500000000)\,(x - 3.) - 0.3782162472\,x\,(x - 0.5000000000)\,(x - 1.)\,(x - 1.500000000)\,(x - 2.500000000)\,(x - 3.) + 0.3028928924\,x\,(x - 0.5000000000)\,(x - 1.)\,(x - 1.500000000)\,(x - 2.)\,(x - 3.) + 0.07458413592\,x\,(x - 0.5000000000)\,(x - 1.)\,(x - 1.500000000)\,(x - 2.)\,(x - 2.500000000) \quad \textbf{(1.31)}$$

> *dvirhe* := *diff*(*virhe*, *x*)

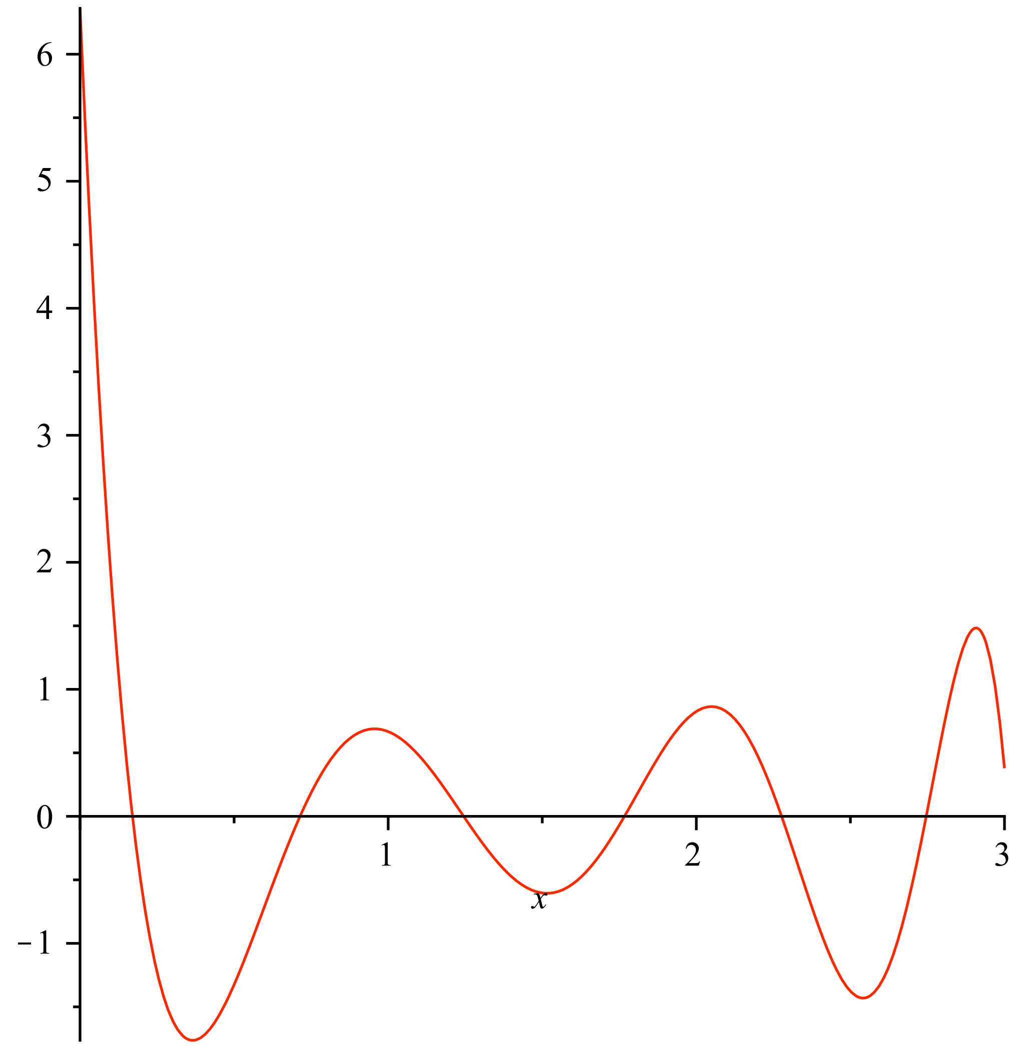
$$dvirhe := 0.5068355769\,(x - 0.5000000000)\,(x - 1.500000000)\,(x - 2.)\,(x \quad \textbf{(1.32)}$$

$$- 2.500000000) (x - 3.) - 1.815368519 (x - 0.5000000000) (x - 1.) (x - 2.) (x$$
$$- 2.500000000) (x - 3.) - 0.4262431188 (x - 0.5000000000) (x - 1.) (x$$
$$- 1.500000000) (x - 2.500000000) (x - 3.) + 0.2548660208 (x$$
$$- 0.5000000000) (x - 1.) (x - 1.500000000) (x - 2.) (x - 3.)$$
$$+ 0.02655726428 (x - 0.5000000000) (x - 1.) (x - 1.500000000) (x - 2.) (x$$
$$- 2.500000000) + 0.7230343751 x (x - 1.500000000) (x - 2.) (x$$
$$- 2.500000000) (x - 3.) - 1.599169720 x (x - 1.) (x - 2.) (x - 2.500000000) (x$$
$$- 3.) - 0.2100443206 x (x - 1.) (x - 1.500000000) (x - 2.500000000) (x - 3.)$$
$$+ 0.4710648190 x (x - 1.) (x - 1.500000000) (x - 2.) (x - 3.)$$
$$+ 0.2427560625 x (x - 1.) (x - 1.500000000) (x - 2.) (x - 2.500000000)$$
$$- 1.212479198 x (x - 0.5000000000) (x - 2.) (x - 2.500000000) (x - 3.)$$
$$+ 0.1766462013 x (x - 0.5000000000) (x - 1.500000000) (x - 2.500000000) (x$$
$$- 3.) + 0.8577553409 x (x - 0.5000000000) (x - 1.500000000) (x - 2.) (x - 3.)$$
$$+ 0.6294465844 x (x - 0.5000000000) (x - 1.500000000) (x - 2.) (x$$
$$- 2.500000000) - 2.145557894 x (x - 0.5000000000) (x - 1.) (x$$
$$- 2.500000000) (x - 3.) - 1.464448755 x (x - 0.5000000000) (x - 1.) (x - 2.) (x$$
$$- 3.) - 1.692757511 x (x - 0.5000000000) (x - 1.) (x - 2.) (x - 2.500000000)$$
$$- 0.0753233548 x (x - 0.5000000000) (x - 1.) (x - 1.500000000) (x - 3.)$$
$$- 0.3036321113 x (x - 0.5000000000) (x - 1.) (x - 1.500000000) (x$$
$$- 2.500000000) + 0.1201450550 (x - 1.) (x - 1.500000000) (x - 2.) (x$$
$$- 2.500000000) (x - 3.) + 0.3774770283 x (x - 0.5000000000) (x - 1.) (x$$
$$- 1.500000000) (x - 2.) - 2 \sin\left(1 + x^2\right) x$$

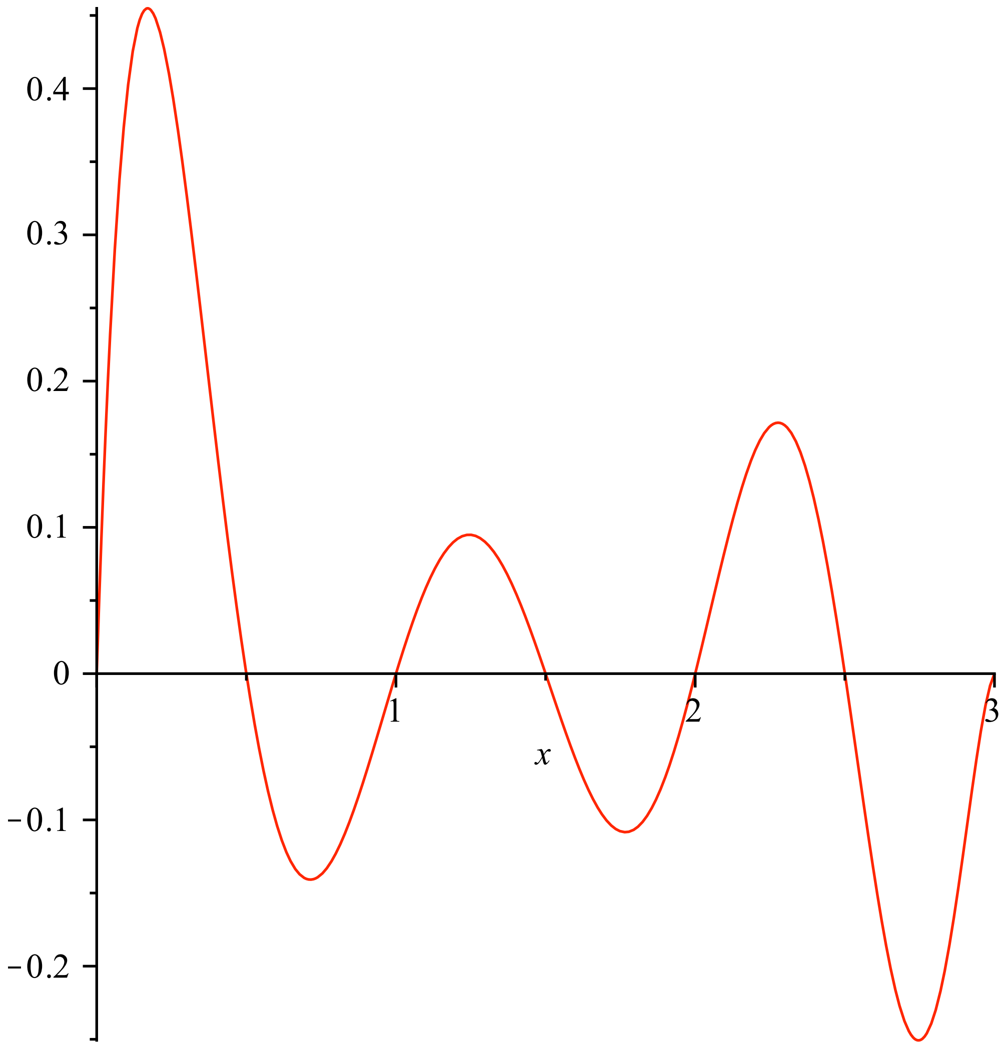
```
> maxx := fsolve(dvirhe = 0, x = 0.2);
```

$$maxx := 0.1701634433 \qquad \textbf{(1.33)}$$

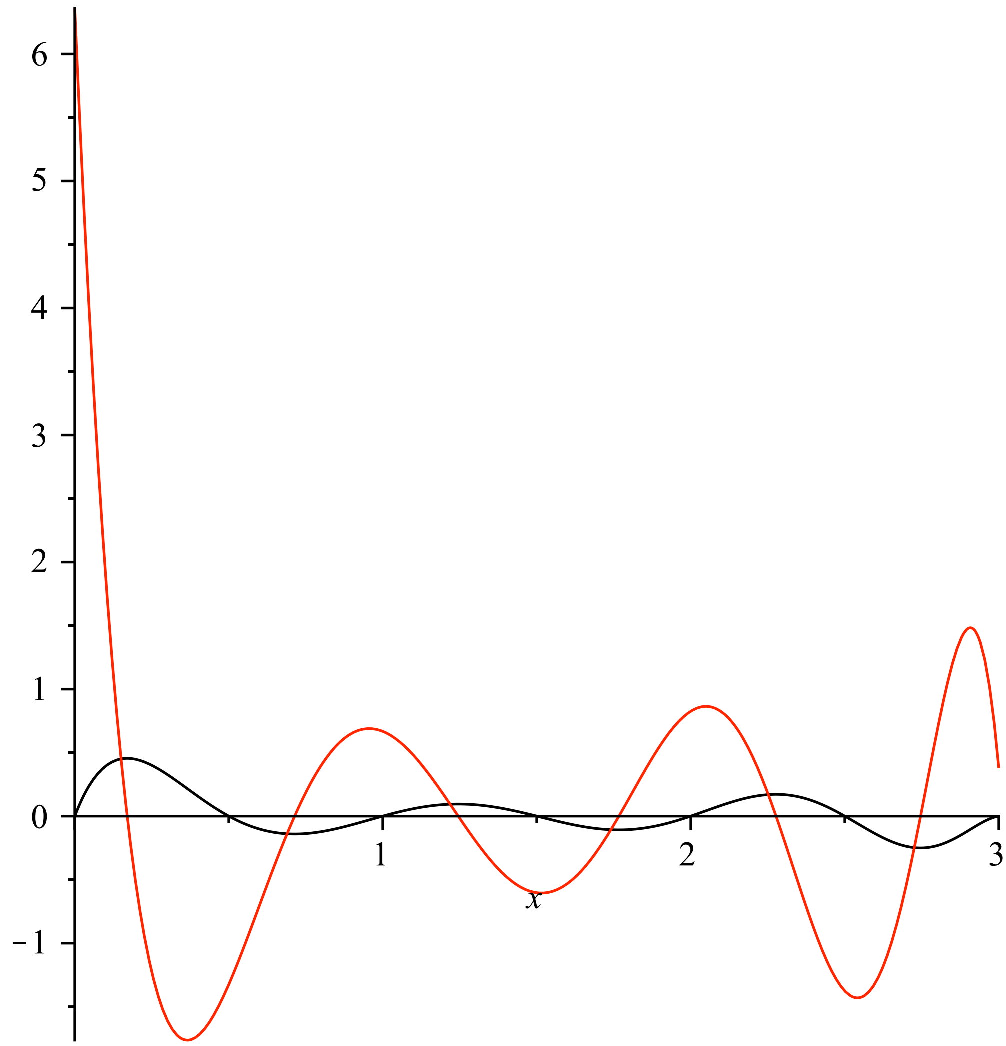
```
> plot(dvirhe, x = 0 ..3)
```



> $plot(virhe, x = 0..3)$



> $plot([virhe, dvirhe], x = 0..3, color = [black, red])$



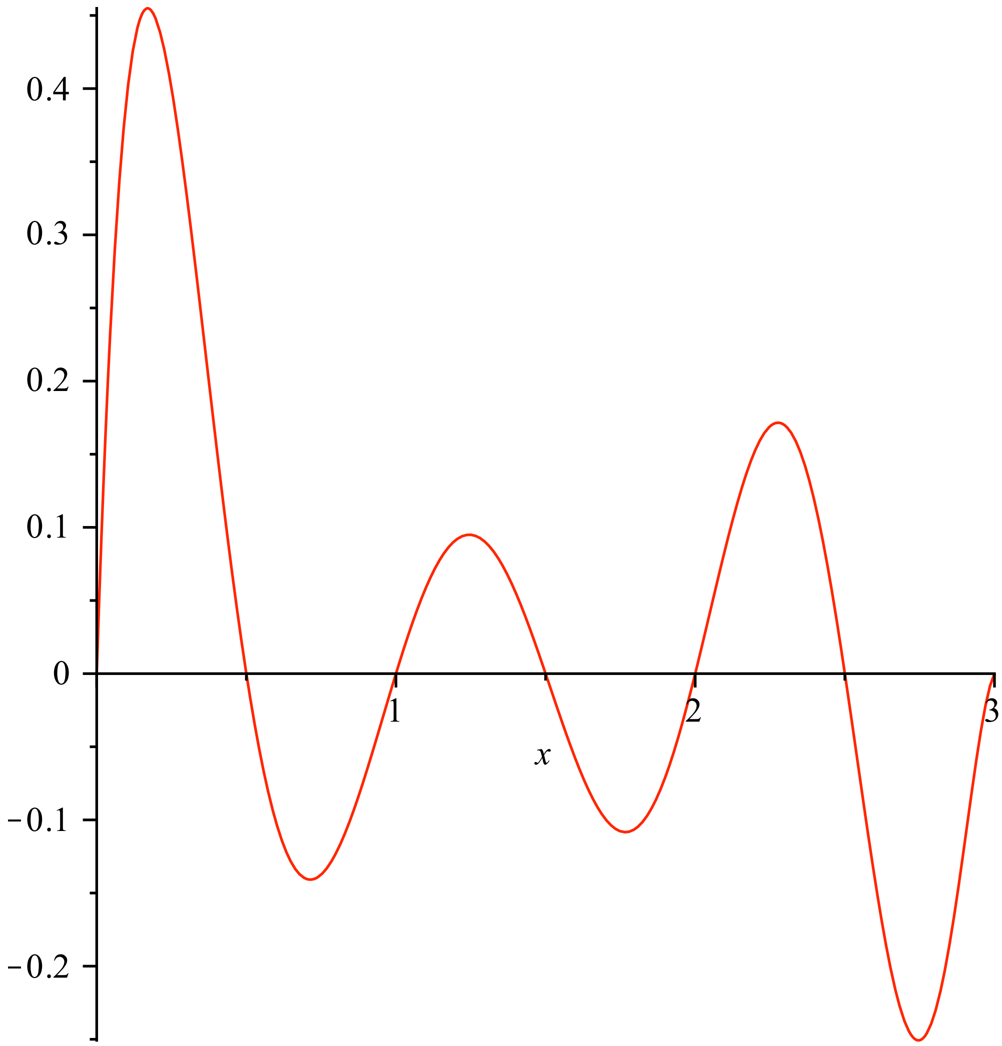
> $subs(x = maxx, virhe);$
$Todellinenmaxvirhe := evalf(\%)$

$$\cos(1.028955597) - 0.06084068669$$

$$Todellinenmaxvirhe := 0.4548732430 \quad \textbf{(1.34)}$$

Virhearvio max-virheen suhteen (ja muutenkin) on tässä tapauksessa käyttökelvottoman karkea, johtuen 7. derivaatan valtavasta maksimista. (Eihän se ξ välttämättä (lähimainkaan) siihen max-kohtaan osu, mutta kun siitä ei mitään tiedetä, ei yleisellä kaavalla parempaa arviota max-virheelle saada.)

> $plot(f(x) - p, x = 0..3)$



Huom! Virhearvion uskottavuuden suhteen tämä ei ollut ihan paras tehtävä näin alkajaisiksi. Toki on hyvä nähdä tällainenkin tapaus.

>