Mat-1.131 Kemiallisen tekniikan matemaattiset menetelmät, syksy 1995

Apiola/Hakula

Tentti 16.1. 1996

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (Ke,Ko,M,Mk,P,R,S,Tf,Ti,Tu);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus.

1. Olkoot matriisin A ominaisarvot $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -2$ ja vastaavat ominaisvektorit $v_1 = [2,1,1]$, $v_2 = [-1,1,1]$, $v_3 = [0,-1,1]$. Määritä A^{-1}.

2. Muunna yhtälö $x'' - 9x + x^3 = 0$ ensimmäisen kertaluvun ryhmäksi ja määritä krittiset pisteet. Selvitä linearisoimalla kunkin kriittisen pisteen luonne (erityisesti stabiilisuus). (Nimityksen muistaminen ei ole tärkeää, parempi on hahmotella kuvaan jokunen trajektori.)

3. Ratkaise vaimennettu värähtelytehtävä:

$$x'' + 2x' + x = \delta(t) - H(t - 2\pi), x(0) = 0, x'(0) = 0.$$

   Tässä herätteenä (ulkoisena voimana) on impulssi (vasaranisku) hetkellä $t = 0$ ja vakiovoima -1 ajanhetkestä $t = 2\pi$ alkaen. Hahmottele ratkaisufunktion kuvaaja välillä $[0, 10]$.

4. Muodosta 2π-jaksoisen funktion $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-\pi/2, \pi/2) \\ 0, & x \in (\pi/2, 3\pi/2) \end{cases}$ Fourier-sarja ja osoita, että

   $1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + -... = \pi/4$

5. Ratkaise alkuarvotehtävä $x' = \left(t^2 + x\right)^{-1}$, $x(0) = 1$ Eulerin menetelmällä. välillä $[0, 0.2]$ käyttäen a.) askelpitutta $h = 0.2$ (vain yksi jakoväli) ja b.) askelpituutta $h = 0.1$ (kaksi jakoväliä).

Mukana saa olla **ei**-ohjelmoitava laskin. Käytettävissä on myös alla oleva minirautaisannos matematiikan kaavoja.

Fourier-kaavoja

f määritelty välillä $(0, L)$.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \qquad (HS_1, HS_2)$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \qquad (HC_1 - HC_3)$$

$$f(x) = \sum_{n=1,3,..}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{2L}, \quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{2L}dx \qquad (QS_1, QS_2)$$

$$f(x) = \sum_{n=1,3,..}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{2L}, \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{2L}dx \qquad (QC_1, QC_2)$$

Trigonometrian kaavoja

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$
$\sin ix = i\sinh x, \quad \cos ix = \cosh x$

Laplace-muunnoksia

Määritelmä: Annettu $f(t)$, $Lf = F$, $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ **Merk.** $u(t) = H(t)$=yksikköaskelfunktio
.

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
t^k	$\frac{k!}{s^{k+1}}$	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

$$(Lf')(s) = sF(s) - f(0), \quad (Lf'')(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0),$$

$$(Lf^{(n)})(s) = s^nF(s) - s^{(n-1)}f(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

$$L\{\int_0^t f(\tau)d\tau\} = \frac{1}{s}F(s), \quad L(f*g) = (Lf)(Lg), (f*g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = (g*f)(t)$$

$$L\{e^{at}f(t)\} = F(s-a), \quad L\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s), \quad L\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$$

$\delta(t-a)$ tarkoittaa *Dirac'n* δ:aa.