Mat-1.131 Kemian tekniikan matemaattiset menetelmät

tentti 19.1.1993 **Tuomela**

1. Anna lyhyet selitykset/määritelmät seuraavista asioista
   - matriisinormi
   - lineaarisesti riippumaton funktiojoukko
   - Geršgorinin ympyrä
   - energian säilymisen laki lämpöyhtälölle (2 p)
   - häiriöalttius

2. Laske seuraavan matriisin ominaisarvot ja -vektorit.
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$
Ovatko ominaisvektorit ortogonaalisia? lineaarisesti riippumattomia? Perustelu. Laske myös A:n L^2 normi.

3. Ratkaise Laplace muunnoksen avulla seuraava differentiaaliyhtälö
$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 2x(t) = 1 & \\ x(0) = 1 & \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$
Mikä on tehtävään liittyvä siirtofunktio? Laske myös $\lim_{t\to\infty} x(t)$.

4. Muotoile maksimiperiaate seuraavalle tehtävälle
$$\begin{cases} -u'' + 3u = \sin(\pi x^2) & 0 < x < 1 \\ u'(0) = 0 & u'(1) = 0 \end{cases}$$
Ratkaise sitten tehtävä differenssimenetelmällä käyttäen askelpituutta $h = 1/4$.

5. Ratkaise tehtävä
$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = g_1(x) & \\ u_t(x,0) = g_2(x) & \\ g_1(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & |x| \le 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases} & g_2(x) = \begin{cases} 4, & |x-2| \le 1 \\ 0, & |x-2| > 1 \end{cases} \end{cases}$$
Tarkastellaan sitten kohtaa $x = 0$; laske $u(0,t)$.