Mat-1.131 Kemian tekniikan matemaattiset menetelmät

Tentti 5.9. 1995 **Apiola/Hakula**

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (Ke,Ko,M,Mk,P,R,S,Tf,Ti,Tu);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus.

1. Esitä jokin yleinen (esim. ominaisarvoihin tai -vektoreihin liittyvä) ehto, jonka avulla voit selvittää kysymyksen matriisin

   $$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

   diagonalisoituvuudesta ja suotuisassa tapauksessa suorita matriisin A diagonalisointi.

2. Kaksi säiliötä, A ja B sisältää $50l$ nestettä kumpikin. Niitä yhdistää kaksi putkea siten, että $A \to B$ virtaa nestettä nopeudella 4 l/min ja $B \to A$ 1 l/min ja oletetetaan, että neste sekoittuu heti. Puhdasta vettä virtaa säiliöön A nopeudella 3 l/min ja säiliöstä B poistuu nestettä niinikään nopeudella 3 l/min. Oletetetaan, että alkuhetkellä säiliö A sisältää 25 kg suolaa ja säiliö B pelkkää vettä. Määritä suolamäärät kummassakin säiliössä ajan funktiona. Hahmottele ratkaisukäyrä faasitasossa.

```
3 l/min
----------          ----------
-->       |         |         |
--        |_________|         |
 |         4 l/min ->         |
 |        -----------         |
 |        |         |         |
 |    A   |         |    B    |
 |        |---------|         |
 |         <-- 1 l/min        |
 |        |---------|        ----
 |________|         | ____________-> 3 l/min
```

3. Laske funktion

$$\frac{s}{(s^2+a^2)^2}$$

Laplace-käänteismuunnos kirjoittamalla se sopivaksi tuloksi ja soveltamalla konvoluutiolausetta.

Vihje: Jos joutuisit integroimaan muotoa $\sin at \cos bt$ olevaa tuloa, kannattaisi kenties muistella trigonometrian kaavoja:

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$,

joiden avulla olisi vaivatonta johtaa integrointiin sovelias muoto.

4. Ratkaise yhtälö

$y'' + 3y' + 2y = r(t), y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$

missä r on neliöaalto:

$$r(t) = \begin{cases} 1, 0 \le t \le 1 \\ 0, t > 1 \end{cases}$$

5. Ratkaise alkuarvotehtävä $y' = t^2 - y, \quad y(0) = 2$ Eulerin menetelmällä. välillä $[0, 0.2]$ käyttäen a.) askelpitutta $h = 0.2$ (vain yksi jakoväli) ja b.) askelpituutta $h = 0.1$ (kaksi jakoväliä).

Vertaa ratkaisua tarkkaan ratkaisuun pisteessä $t = 0.2$. Käyttäytyykö virhe odotetulla tavalla $(O(h))$, kun askelpituus puolitetaan?