Mat-1.373 Matematiikan peruskurssi Y 3

Apiola/Hakula

Tentti 23.05. 1996

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (Ke,Ko,M,Mk,P,R,S,Tf,Ti,Tu);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus.

1. Olkoon A diagonalisoituva neliömatriisi, ts. A voidaan esittää muodossa $A = QDQ^{-1}$, missä D on diagonaalimatriisi.

   a) Osoita, että $A^n = QD^nQ^{-1}$.

   b) Olkoon $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

   Osoita, että A on diagonalisoituva ja laske A^6 .

2. Kaksi säiliötä, A ja B sisältää 50 l nestettä kumpikin. Niitä yhdistää kaksi putkea siten, että $A \to B$ virtaa nestettä nopeudella 4 l/min ja $B \to A$ 1 l/min ja oletetetaan, että neste sekoittuu heti. Puhdasta vettä virtaa säiliöön A nopeudella 3 l/min ja säiliöstä B poistuu nestettä niinikään nopeudella 3 l/min.

```
3 l/min
----------          ----------
-->       |          |         |
--        |_________|         |
 |         4 l/min ->          |
 |        -----------          |
 |        |          |         |
 |    A   |          |    B    |
 |        |---------|          |
 |         <--1 l/min          |
 |        |---------|         ----
 |_______|          |  ____________-> 3 l/min
```

Oletetetaan, että alkuhetkellä säiliö A sisältää 25 kg suolaa ja säiliö B pelkkää vettä.

a) Määritä suolamäärät kummassakin säiliössä ajan funktiona.

b) Millä ajanhetkellä säiliöiden suolamäärät ovat samat?

3. Laske funktion f_1 Laplace muunnos ja funktion F_2 käänteismuunnos, kun

$$f_1(t) = \begin{cases} 0\,, & 0 \le t < 2 \\ 2\,, & 2 < t < 3 \\ -2\,, & 3 < t < 4 \\ 0\,, & t > 4 \end{cases} \qquad\qquad F_2(s) = \frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}$$

4. Ratkaise numeerisesti alkuarvotehtävä $x' = \frac{1}{t+x^2}$, $x(0) = 1$ välillä $[0,1]$ jakamalla väli a) kahteen, b) kolmeen yhtä suureen osaan. Käytä Eulerin menetelmää. Ilmoita ratkaisusi taulukkoina muodossa `t-sarake, x-sarake` (kolmella numerolla) ja piirrä kuvaajat (samaan kuvaan).

5. Määrittele kompleksinen exp-funktio ja osoita, että se on analyyttinen koko kompleksitasossa ja johda sen derivaatan lauseke.

Mukana saa olla **ei**-ohjelmoitava laskin. Käytettävissä on myös alla oleva minirautaisannos matematiikan kaavoja.

Laplace-muunnoksia

Määritelmä: Annettu $f(t)$, $Lf = F$, $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ **Merk.** $u(t) = H(t)$=yksikköaskelfunktio
.

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
t^k	$\frac{k!}{s^{k+1}}$	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

$$(Lf')(s) = sF(s) - f(0), \quad (Lf'')(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0),$$

$$(Lf^{(n)})(s) = s^nF(s) - s^{(n-1)}f(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

$$L\{\int_0^t f(\tau)d\tau\} = \frac{1}{s}F(s), \quad L(f*g) = (Lf)(Lg), (f*g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = (g*f)(t)$$

$$L\{e^{at}f(t)\} = F(s-a), \quad L\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s), \quad L\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$$

$\delta(t-a)$ tarkoittaa *Dirac'n* δ:aa.