Mat-1.373 Matematiikan peruskurssi Y 3, syksy 1995

Apiola/Hakula

Tentti 16.01. 1996

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (Ke,Ko,M,Mk,P,R,S,Tf,Ti,Tu);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus.

1. Olkoot matriisin A ominaisarvot $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -2$ ja vastaavat ominaisvektorit $v_1 = [2,1,1]$, $v_2 = [-1,1,1]$, $v_3 = [0,-1,1]$. Määritä A^{-1}.

2. Muunna yhtälö $x''-9x+x^3 = 0$ ensimmäisen kertaluvun ryhmäksi ja määritä krittiset pisteet. Selvitä linearisoimalla kunkin kriittisen pisteen luonne (erityisesti stabiilisuus). (Nimityksen muistaminen ei ole tärkeää, parempi on hahmotella kuvaan jokunen trajektori.)

3. Ratkaise vaimennettu värähtelytehtävä:

$$x'' + 2x' + x = \delta(t) - H(t-2\pi), x(0) = 0, x'(0) = 0.$$

   Tässä herätteenä (ulkoisena voimana) on impulssi (vasaranisku) hetkellä $t = 0$ ja vakiovoima -1 ajanhetkestä $t = 2\pi$ alkaen. Hahmottele ratkaisufunktion kuvaaja välillä $[0, 10]$.

4. Määritä 10 cm pitkän hopeasauvan lämpötilafunktio $u(x,t)$, kun sauvan molemmat päät pidetään "jäissä" $(0°C)$ ja sauvan alkulämpötilan antaa funktio

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 5 \\ 10 - x, & 5 < x < 10 \end{cases}.$$

   Hopean diffuusiokerroin: $\alpha^2 = 1.70$ cm^2/s ja lämmönjohtumisyhtälöhän on $\alpha^2 u_{xx} = u_t$. Suorita muuttujanerotteluprosessi alusta alkaen.

5. Laske

$$\oint_c \frac{ze^z}{(z^2+1)^2} dz,$$

   kun c on ympyrä $|z| = 3$ kierrettynä vastapäivään.

Mukana saa olla **ei**-ohjelmoitava laskin. Käytettävissä on myös alla oleva minirautaisannos matematiikan kaavoja.

Fourier-kaavoja

f määritelty välillä $(0, L)$.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \qquad (HS_1, HS_2)$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \qquad (HC_1 - HC_3)$$

$$f(x) = \sum_{n=1,3,..}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{2L}, \quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{2L}dx \qquad (QS_1, QS_2)$$

$$f(x) = \sum_{n=1,3,..}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{2L}, \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{2L}dx \qquad (QC_1, QC_2)$$

Trigonometrian kaavoja

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$\sin ix = i\sinh x, \quad \cos ix = \cosh x$

Laplace-muunnoksia

Määritelmä: Annettu $f(t)$, $Lf = F$, $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ **Merk.** $u(t) = H(t)$=yksikköaskelfunktio

.

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
t^k	$\frac{k!}{s^{k+1}}$	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

$$(Lf')(s) = sF(s) - f(0), \quad (Lf'')(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0),$$

$$(Lf^{(n)})(s) = s^nF(s) - s^{(n-1)}f(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

$$L\{\int_0^t f(\tau)d\tau\} = \frac{1}{s}F(s), \quad L(f*g) = (Lf)(Lg), (f*g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = (g*f)(t)$$

$$L\{e^{at}f(t)\} = F(s-a), \quad L\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s), \quad L\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$$

$\delta(t-a)$ tarkoittaa *Dirac'n* δ:aa.