Mat-1.373 Matematiikan peruskurssi Y 3

Apiola/Arponen

Tentti 23.5. 1997

Mat-1.131 KeTeMa

Ketema-suorittajat laskevat 4 ensimmäistä tehtävää. Aikaa heillä on 3 h 12 min.

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (AUT, TFY, TIK, TUO, SÄH, KON, KEM, MAK, PUU, RYK);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus.

1. Kaupungin liikennesuunnitteluvirasto (*Heikki Salmivaaran* johdolla) on kerännyt liikennevirtadataa neljän risteyksen muodostamalta alueelta ruuhka-aikana. Kadut ovat yhdensuuntaisia kuvassa näkyvien nuolien osoittamalla tavalla. Kuvaan on merkitty risteyksiin tulevat ja niistä lähtevät liikennemäärät tunnissa. Koska risteykseen saapuvien ajoneuvojen täytyy myös poistua siitä, saadaan yhtälöryhmä tuntemattomien liikennemäärien x_1, x_2, x_3, x_4 määräämiseksi, jotka kuvaavat liikennemääriä katuverkon sisäosassa.

```
        Fabianink.                       Unionink.
         ^                                v
         |800                             |400
   800   |           Pohj.espl.           |
<-------------------<-----------------------< 600
         |             x1                 |
         |                                |        HAVIS
    x4   ^                      KAPPELI   v x2     AMANDA
         |             x3                 |
>------------------>------------------------> 1000
  1200   |          Eteläespl.            |
         |                                |
         ^                                v
        1000                             600
```

- Määritä ratkaisut ja totea, että tehtävällä on niitä ääretön määrä **(4 p.)**
- Missä rajoissa Esplanadien välisen Fabianinkadun osan liikennemäärän tulee olla, jotta millään katuosuudella ei tarvitse vaihtaa ajosuuntaa osoittavia liikennemerkkejä. **(2 p.)**

2. Ratkaise systeemi $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(\mathbf{0}) = (1,0,0)$, missä $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ Voit valita mieleisesi menetelmän. Mainittakoon, että yksi ominaisarvo $= 1$.

3. Ratkaise Laplace-muunnoksen avulla alkuarvotehtävä

$$y'' + 4y' + 3y = \begin{cases} t, & 0 < t < 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

4. • Laske Eulerin menetelmällä ratkaisuapproksimaatiot alkuarvotehtävälle

$$y' = \frac{2}{t}y + t^2 e^t, \quad y(1) = 0$$

välillä $t \in [1, 2]$, kun askel $h = 0.25$ (siis pisteissä $t_1 = 1 + h, t_2 = 1 + 2h, t_3 = 1 + 3h, t_4 = 2$). **(4 p.)**

• Totea sijoittamalla, että tarkka ratkaisu on $y(t) = t^2(e^t - e)$ ja määritä absoluuttinen ja suhteellinen virhe laskentapisteissä. **(2 p.)**

5. • Muodosta kompleksisen logaritmifunktion reaali- ja imaginaariosat, ts. reaalifunktiot u ja v siten, että $\log(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, missä $z = x + iy$. **(2 p.)**

• Osoita *Cauchy–Riemannin* yhtälöiden avulla, että logaritmi on analyyttinen funktio. **(2 p.)**

• Johda kaavan $f'(z) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$ avulla derivaatan lauseke ja lausu se kompleksimuuttujan z avulla. **(2 p.)**

Huom! Tarkoittakoon log tässä sopivasti aukileikattuun kompleksitasoon liittyvää logaritmin haaraa (siis jos nyt satutaan olemaan negatiivisella reaaliakselilla, niin tarkastellaan positiivista re-akselia pitkin aukileikattua tasoa). Tämä tarkoittaa, että "haara-asioihin" ei ole tarpeen paneutua.

Mukana saa olla **ei**-ohjelmoitava laskin.

Hyödyllisiä kaavoja

Fourier-kaavoja

Yleinen tapaus, f määritelty välillä $(-L, L)$

$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$
$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx, \quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$

Puolen jakson laajennukset, f määritelty välillä $(0, L)$

Sinisarja

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \qquad (HS_1, HS_2)$$

Kosinisarja

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \qquad (HC_1 - HC_3)$$

Nejännesjakson laajennukset, f **määritelty välillä** $(0, L)$

$$f(x) = \sum_{n=1,3,..}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{2L}, \quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{2L}dx \qquad (QS_1, QS_2)$$

$$f(x) = \sum_{n=1,3,..}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{2L}, \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{2L}dx \qquad (QC_1, QC_2)$$

Trigonometrian kaavoja

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$
$\sin ix = i\sinh x, \quad \cos ix = \cosh x$

Laplace-muunnoksia

Määritelmä: Annettu $f(t)$, $Lf = F$, $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$ **Merk.** $u(t) = H(t)$=yksikköaskelfunktio
.

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
t^k	$\frac{k!}{s^{k+1}}$	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

$$(Lf')(s) = sF(s) - f(0), \quad (Lf'')(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0),$$

$$(Lf^{(n)})(s) = s^nF(s) - s^{(n-1)}f(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

$$L\{\int_0^t f(\tau)d\tau\} = \frac{1}{s}F(s), \quad L(f*g) = (Lf)(Lg), (f*g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = (g*f)(t)$$

$$L\{e^{at}f(t)\} = F(s-a), \quad L\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s), \quad L\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$$

$\delta(t-a)$ tarkoittaa *Dirac'n* δ:aa.