Mat-1.373 Matematiikan peruskurssi Y 3 (ja Mat-1.131)

Apiola/Arponen

Tentti 15.1. 1997

Mat-1.131 KeTeMa-suorittajat laskevat 3 ensimmäistä tehtävää sekä tehtävän `ketema 4`. Aikaa ketemisteille on varattu 3 h.

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (AUT, TFY, TIK, TUO, SÄH, KON, KEM, MAK, PUU, RYK);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus.

1. Laske sopivaa Taylorin polynomia ja siihen liittyvää virhetermiä hyväksi käyttäen likiarvo integraalille
$$\int_0^1 \sqrt{x}e^{x^2}\,dx$$
siten, että virheen itseisarvo on korkeintaan 0.002.
Huom: Älä tee tehtävästä työläämpää kuin on tarpeen; osaathan integroida muotoa $\sqrt{x}p(x)$ olevan funktion, kun $p(x)$ on polynomi.

2. Olkoon A diagonalisoituva neliömatriisi, ts. A voidaan esittää muodossa $A = QDQ^{-1}$, missä D on diagonaalimatriisi.
a) Osoita, että $A^n = QD^nQ^{-1}$.
b) Olkoon $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$
Osoita, että A on diagonalisoituva ja laske A^6 .

3. Ratkaise Laplace-muunnoksen avulla alkuarvotehtävä
$$y'' + 4y' + 3y = \begin{cases} t, & 0 < t < 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

4. Määritä 10 cm pitkän hopeasauvan lämpötilafunktio $u(x,t)$, kun sauvan molemmat päät pidetään "jäissä" $(0°C)$ ja sauvan alkulämpötilan antaa funktio
$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 5 \\ 10 - x, & 5 < x < 10 \end{cases}.$$
Hopean diffuusiokerroin: $\alpha^2 = 1.70\ \mathrm{cm}^2/\mathrm{s}$ ja lämmönjohtumisyhtälöhän on $\alpha^2 u_{xx} = u_t$. Suorita muuttujanerotteluprosessi alusta alkaen.

5. Laske
$$\oint_C \left(\frac{\cos z}{z-2i} + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}\right)dz,$$
missä C on yksikköympyrä vastapäivään kierrettynä.

- [KeTeMa 4] *"Backward Euler"* (BE) on implisiittisten menetelmien kantaäiti: $x_{n+1} = x_n + hf(t_{n+1}, x_{n+1})$.

  a) Selvitä, mikä on tavallisen Eulerin ja (BE):n geometrinen tulkinta .

  Tarkastellaan lineaarista homogeenista systeemiä $x' = Ax$.

  b) Osoita, että BE- kaava voidaan kirjoittaa ratkaistuun muotoon: $x_{n+1} = (I - hA)^{-1} x_n$, mikäli $I - hA$ on kääntyvä.

  c) Osoita, että matriisi $I - hA$ $(h > 0)$ on kääntyvä, jos A:n ominaisarvot ovat negatiiviset.

Mukana saa olla **ei**-ohjelmoitava laskin.

Hyödyllisiä kaavoja

Fourier-kaavoja

Yleinen tapaus, f määritelty välillä $(-L, L)$

$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$
$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$

Puolen jakson laajennukset, f määritelty välillä $(0, L)$

Sinisarja

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \qquad (HS_1, HS_2)$$

Kosinisarja

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \qquad (HC_1 - HC_3)$$

Nejännesjakson laajennukset, f määritelty välillä $(0, L)$

$$f(x) = \sum_{n=1,3,..}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{2L}, \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{2L} dx \qquad (QS_1, QS_2)$$

$$f(x) = \sum_{n=1,3,..}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{2L}, \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{2L} dx \qquad (QC_1, QC_2)$$

Trigonometrian kaavoja

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$
$\sin ix = i \sinh x, \quad \cos ix = \cosh x$

Laplace-muunnoksia

Määritelmä: Annettu $f(t)$, $Lf = F$, $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$ **Merk.** $u(t) = H(t)$=yksikköaskelfunktio

.

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
t^k	$\frac{k!}{s^{k+1}}$	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

$$(Lf')(s) = sF(s) - f(0), \quad (Lf'')(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0),$$

$$(Lf^{(n)})(s) = s^nF(s) - s^{(n-1)}f(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

$$L\{\int_0^t f(\tau)d\tau\} = \frac{1}{s}F(s), \quad L(f*g) = (Lf)(Lg), (f*g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = (g*f)(t)$$

$$L\{e^{at}f(t)\} = F(s-a), \quad L\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s), \quad L\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$$

$\delta(t-a)$ tarkoittaa *Dirac'n* δ:aa.