Mat-1.373 Matematiikan peruskurssi Y 3

Apiola

Tentti 4.9. 1997

Mat-1.131 KeTeMa

Mahd. Ketema-suorittajat laskevat 4 ensimmäistä tehtävää. Aikaa heillä on 3 h 12 min.

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (AUT, TFY, TIK, TUO, SÄH, KON, KEM, MAK, PUU, RYK);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus.

1. Muodosta lineaarinen yhtälösyteemi alla olevalle virtapiirille ja ratkaise virrat.

```
           8 V
         <-----              Kirchhofin virtalaki:
    I1    |
----<---- | |---------   Virtapiirin jokaisessa pisteessä pätee:
|         |          |   tulevien virtojen summa =  lähtevien
<                    <   summa.
> 1 Ohmi      1 Ohmi >
<                    <       Kirchhofin jännitelaki:
>                    >
|     0.5 Ohmia      |   Virtapiirin jokaisessa suljetussa silmukassa
------\/\/\/--->-----|   ulkoisen jännitelähteen jännite =
|              I3    |   jännitehäviöiden summa.
<                    |
>                    |      Ohmin laki: U=RI
< 2 Ohmia         I2 \/
>                    |
|         |          |
----<---- | |---------
          |
        16 V
      <------
```

2. Laske sopivaa Taylorin polynomia ja siihen liittyvää virhetermiä hyväksi käyttäen likiarvo integraalille
$$\int_0^1 \sqrt{x}e^{x^2}\,dx$$
siten, että virheen itseisarvo on korkeintaan 0.002.

   Huom: Älä tee tehtävästä työläämpää kuin on tarpeen; osaathan integroida muotoa $\sqrt{x}p(x)$ olevan funktion, kun $p(x)$ on polynomi.

3. Ratkaise systeemi $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(\mathbf{0}) = (1,0,0)$, missä $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ Voit valita mieleisesi menetelmän. Mainittakoon, että yksi ominaisarvo $= 1$.

4. Ratkaise Laplace-muunnoksen avulla alkuarvotehtävä

$$y'' + 4y' + 3y = \begin{cases} t, & 0 < t < 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

5. Määritä 10 cm pitkän hopeasauvan lämpötilafunktio $u(x,t)$, kun sauvan molemmat päät pidetään "jäissä" $(0°C)$ ja sauvan alkulämpötilan antaa funktio

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 5 \\ 10 - x, & 5 < x < 10 \end{cases}.$$

Hopean diffuusiokerroin: $\alpha^2 = 1.70$ cm^2/s ja lämmönjohtumisyhtälöhän on $\alpha^2 u_{xx} = u_t$. Suorita muuttujanerotteluprosessi alusta alkaen.

Mukana saa olla **ei**-ohjelmoitava laskin.

Hyödyllisiä kaavoja

Fourier-kaavoja

Yleinen tapaus, f määritelty välillä $(-L, L)$

$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$
$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx, \quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$

Puolen jakson laajennukset, f määritelty välillä $(0, L)$

Sinisarja

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \qquad (HS_1, HS_2)$$

Kosinisarja

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \qquad (HC_1 - HC_3)$$

Nejännesjakson laajennukset, f määritelty välillä $(0, L)$

$$f(x) = \sum_{n=1,3,..}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{2L}, \quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{2L}dx \qquad (QS_1, QS_2)$$

$$f(x) = \sum_{n=1,3,..}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{2L}, \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{2L}dx \qquad (QC_1, QC_2)$$

Trigonometrian kaavoja

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$
$\sin ix = i\sinh x, \quad \cos ix = \cosh x$

Laplace-muunnoksia

Määritelmä: Annettu $f(t)$, $Lf = F$, $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$ **Merk.** $u(t) = H(t)$=yksikköaskelfunktio
.

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
t^k	$\frac{k!}{s^{k+1}}$	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

$$(Lf')(s) = sF(s) - f(0), \quad (Lf'')(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0),$$

$$(Lf^{(n)})(s) = s^nF(s) - s^{(n-1)}f(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

$$L\{\int_0^t f(\tau)d\tau\} = \frac{1}{s}F(s), \quad L(f*g) = (Lf)(Lg), (f*g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = (g*f)(t)$$

$$L\{e^{at}f(t)\} = F(s-a), \quad L\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s), \quad L\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$$

$\delta(t-a)$ tarkoittaa *Dirac'n* δ:aa.