Mat-1.373 Matematiikan peruskurssi Y 3

Apiola/Arponen

Tentti 24.9. 1996

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (Ke,Ko,M,Mk,P,R,S,Tf,Ti,Tu);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus.

1. Laske sopivaa Taylorin polynomia ja siihen liittyvää virhetermiä hyväksi käyttäen likiarvo integraalille

$$\int_0^1 \sqrt{x}e^{x^2}dx$$

siten, että virheen itseisarvo on korkeintaan 0.007.

Huom: Älä tee tehtävästä työläämpää kuin on tarpeen; osaathan integroida muotoa $\sqrt{x}p(x)$ olevan funktion, kun $p(x)$ on polynomi.

2. Määritä matriisin $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ ominaisarvot ja ominaisvektorit sekä kunkin ominaisarvon algebrallinen ja geometrinen kertaluku. Onko matriisi diagonalisoituva?

3. a) Määritä likiarvot sähköstaattiselle potentiaalille pisteissä P_{11}, P_{12}, P_{13} alueessa, jota rajoittavat johtavat metallilevyt:

$u(x,4) = \sin \frac{\pi}{2}x$

```
        4 |-------|
          |   |   |
          |--1,3--|
          |   |   |
        2 |--1,2--| u=0
   u=0    |   |   |
          |--1,1--|
          |   |   |
        0 |-------|
          0   1   2
            u=0
```

b) Osoita, että tarkka ratkaisu on muotoa $u(x,y) = A\sin\frac{\pi x}{2}\sinh\frac{\pi y}{2}$, määritä vakio A ja vertaa a)-kohdan tuloksia tarkan ratkaisun antamiin (äläkä hämmästy, vaikka tarkkuus ei olisi kovin hyvä).

Vihje: Kyseessähän on Laplacen yhtälö $\nabla^2 u = 0$. Differenssimenetelmä on muotoa $U_{j,k} = (1/4)(L + E + I + P)$, missä kirjaimet viittaavat ilmansuuntiin. b)-kohdassa on tarpeetonta koluta kaikkia muuttujanerotteluprosessin koukeroita.

4. Muodosta funktion $f(x) = x^2, \quad x \in (-\pi, \pi)$ Fourier-sarja ja laske sen avulla sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ summa.

5. Määrittele kompleksinen exp-funktio ja osoita, että se on analyyttinen koko kompleksitasossa ja johda sen derivaatan lauseke.

Mukana saa olla **ei**-ohjelmoitava laskin. Käytettävissä on myös alla oleva minirautaisannos matematiikan kaavoja.

Hyödyllisiä kaavoja

Fourier-kaavoja

Yleinen tapaus, f määritelty välillä $(-L, L)$

$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$
$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx, \quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$

Puolen jakson laajennukset, f määritelty välillä $(0, L)$

Sinisarja

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \qquad (HS_1, HS_2)$$

Kosinisarja

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \qquad (HC_1 - HC_3)$$

Nejännesjakson laajennukset, f määritelty välillä $(0, L)$

$$f(x) = \sum_{n=1,3,..}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{2L}, \quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{2L}dx \qquad (QS_1, QS_2)$$

$$f(x) = \sum_{n=1,3,..}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{2L}, \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{2L}dx \qquad (QC_1, QC_2)$$

Trigonometrian kaavoja

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$
$\sin ix = i\sinh x, \quad \cos ix = \cosh x$

Laplace-muunnoksia

Määritelmä: Annettu $f(t)$, $Lf = F$, $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ **Merk.** $u(t) = H(t)$=yksikköaskelfunktio
.

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
t^k	$\frac{k!}{s^{k+1}}$	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

$$(Lf')(s) = sF(s) - f(0), \quad (Lf'')(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0),$$

$$(Lf^{(n)})(s) = s^nF(s) - s^{(n-1)}f(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

$$L\{\int_0^t f(\tau)d\tau\} = \frac{1}{s}F(s), \quad L(f*g) = (Lf)(Lg), (f*g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = (g*f)(t)$$

$$L\{e^{at}f(t)\} = F(s-a), \quad L\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s), \quad L\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$$

$\delta(t-a)$ tarkoittaa *Dirac'n* δ:aa.