Mat-1.373 Matematiikan peruskurssi Y 3, syksy 1995

Apiola/Hakula

Tentti 13.12. 1995

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (Ke,Ko,M,Mk,P,R,S,Tf,Ti,Tu);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus.

1. Eräässä koesarjassa tutkittiin puolijohdeliitoksen kapasitanssin riippuvuutta jännitteestä ja saatiin seuraava taulukko:

jännite	25 V	12.5 V	5 V	2.5 V
kapasitanssi	1 nF	2 nF	5 nF	10 nF

Muodosta näiden arvojen perusteella Lagrangen interpolaatiopolynomi kapasitanssille ja laske sen avulla jännitettä 18.5 V vastaava kapasitanssi.

2. Laske A^{95}, kun $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

3. Ratkaise alkuarvotehtävä $\ddot{x} + 2\dot{x} = H(t-1), \quad x(0) = 0, \dot{x}(0) = 1.$

   Tässä H on Heavisiden funktio, eli yksikköaskelfunktio, jota usein myös u:lla merkitään.

4. Sauvan, jonka pituus $l = 10$ cm, päät pidetään $0°C$:ssa ja alkulämpötilan antaa funktio $f(x) = \cos\frac{\pi x}{l}$.

   a) Ratkaise lämpöyhtälön $\alpha^2 u_{xx} = u_t$ näillä reuna- ja alkuehdoilla, kun $\alpha^2 = 1.14 cm^2$/s.

   b) Hahmottele sauvan lämpötilaprofiilin kuvaaja minuutin (= $60s$) kuluttua alkuhetkestä laskemalla lämpötila sauvan (vähintään) kolmessa tasavälisesti valitussa pisteessä käyttäen sarjan kahta ensimmäistä nollasta poikkevaa termiä.

Laske vain toinen tehtävistä 5.1, 5.2 . Jos yrität molempia, **ilmoita selvästi, kumman haluat tulevan arvostelluksi**

- 5.1 Olkoon $f(z) = \log z$ (e-kantainen) logaritmin haara, joka on määritelty positiivista x-akselia pitkin aukileikatussa tasossa $D = \{z \mid 0 < arg z < 2\pi\}$. Osoita *Cauchy-Riemannin* yhtälöiden avulla, että f on analyyttinen D:ssä ja johda derivaatan lauseke.

- 5.2 Laske

$$\oint_c \frac{\sinh 3z}{(z^2+1)^2} dz,$$

  kun c on ympyrä $|z| = 3$ kierrettynä vastapäivään.

Mukana saa olla **ei**-ohjelmoitava laskin. Käytettävissä on myös alla oleva minirautaisannos matematiikan kaavoja.

Fourier-kaavoja

f määritelty välillä $(0, L)$.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \qquad (HS_1, HS_2)$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \qquad (HC_1 - HC_3)$$

$$f(x) = \sum_{n=1,3,..}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{2L}, \quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{2L} dx \qquad (QS_1, QS_2)$$

$$f(x) = \sum_{n=1,3,..}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{2L}, \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{2L} dx \qquad (QC_1, QC_2)$$

Trigonometrian kaavoja

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$
$\sin ix = i\sinh x, \quad \cos ix = \cosh x$

Laplace-muunnoksia

Määritelmä: Annettu $f(t)$, $Lf = F$, $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ **Merk.** $u(t) = H(t)$=yksikköaskelfunktio
.

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
t^k	$\frac{k!}{s^{k+1}}$	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

$$(Lf')(s) = sF(s) - f(0), \quad (Lf'')(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0),$$

$$(Lf^{(n)})(s) = s^nF(s) - s^{(n-1)}f(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

$$L\{\int_0^t f(\tau)d\tau\} = \frac{1}{s}F(s), \quad L(f*g) = (Lf)(Lg), (f*g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = (g*f)(t)$$

$$L\{e^{at}f(t)\} = F(s-a), \quad L\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$