Mat-1.373 Matematiikan peruskurssi Y 3, syksy 1996

Apiola/Arponen

3. välikoe 10.12. 1996

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (Ke,Ko,M,Mk,P,R,S,Tf,Ti,Tu);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus.

Mukana saa olla **ei**-ohjelmoitava laskin.

Mat-1.131 KeTeMa

Nyt on viimeinen hetki tehdä päätös Y3/KeTeMa. Jos kallistut KeTeMaan, jätä tyhjä paperi, jossa kuitenkin on henkilötiedot ja KeTeMa-päätös.

---

1. Funktio $f(x) = x^3 \quad x \in [0, 1]$ laajennetaan parilliseksi välille $[-1, 1]$ ja edelleen 2-jaksoiseksi koko reaaliakselille.

   a) Piirrä hahmotelma funktion kuvaajasta välillä $[-3, 3]$

   b) Kehitä näin laajennettu funktio Fourier-sarjaksi. Laskutyön vähentämiseksi voit halutessasi käyttää seuraavaa MAPLE-laskelmaa:

```
> int(x^3*cos(c*x),x=a..b);
```

$$\frac{c^3b^3\sin(bc) + 3c^2b^2\cos(bc) - 6\cos(bc) - 6bc\sin(bc)}{c^4} - \frac{c^3a^3\sin(ac) + 3c^2a^2\cos(ac) - 6\cos(ac) - 6ac\sin(ac)}{c^4}$$

---

2. Olkoon (irrationaalisen) sauvan pituus $= \pi$ ja alkulämpötila $u(x, 0) = \begin{cases} u_1, & x \in (0, \pi/2) \\ u_2, & x \in (\pi/2, \pi) \end{cases}$, missä u_1 ja u_2 ovat vakioita.

   (Voidaan ajatella, että sauva on kahtena puolikkaana, jotka liitetään toisiinsa hetkellä $t = 0$.)

   Reunaehdot ovat tutunomaiset jäädytykset: $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ ja lämpöyhtälöhän on

   $u_t = \alpha^2 u_{xx}$, missä oletamme, että $\alpha = 1$.

   Määritä ratkaisu $u(x, t)$ käymällä läpi muuttujien erotteluprosessi (ei siis sijoittamalla valmiiseeen kaavaan).

3. Tarkastellaan Laplacen yhtälön diskretointia neliössä, joka diskretoidaan jakamalla molemmissa suunnissa 3:een osaan.

   a) Järjestetään hilan sisäpisteissä laskettavat approksimaatiot näin: $u_{11}, u_{21}, u_{12}, u_{22}$. Mikä on tällöin saatavan yhtälösysteemin matriisi.

   b) Määritä potentiaali 3×3-hilan sisäpisteissä $P_{11}, P_{21}, P_{12}, P_{22}$, missä hilapisteet kummallakin akselilla ovat $0, 1, 2, 3$ ja reuna-arvot ovat yläreunalla $u = \sin \frac{\pi x}{3}$ ja alareunoilla $u = \cos \frac{\pi x}{3}$ sekä sivureunoilla $= 0$. Tässä riittää muodostaa yhtälösysteemi ja antaa MAPLE- (tai MATLAB-)komento, jolla se ratkaistaisiin.

   (Oikeasta yhtälösysteemistä saa 5 p)

4. a) Jos funktio $\sin z$ esitetään muodossa $u(x,y)+iv(x,y)$, niin osoita, että $u(x,y)=\sin x\cosh y$ ja johda vastaavanlainen muoto $v(x,y)$:lle.

   b) Osoita *Cauchy–Riemannin* yhtälöiden avulla, että $\sin z$ on koko kompleksitasossa analyyttinen ja osoita lisäksi, että $\frac{d}{dz}\sin z = \cos z$

Fourier-kaavoja

f määritelty välillä $(0, L)$.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \qquad (HS_1, HS_2)$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \qquad (HC_1 - HC_3)$$

$$f(x) = \sum_{n=1,3,..}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{2L}, \quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{2L}dx \qquad (QS_1, QS_2)$$

$$f(x) = \sum_{n=1,3,..}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{2L}, \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{2L}dx \qquad (QC_1, QC_2)$$

Trig. ja exp-tyyppisiä kaavoja

Seuraavassa esiintyvät argumentit ovat yleisesti kompleksilukuja.

$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}), \quad \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$

$\sinh z = \frac{1}{2}(e^{z} - e^{-z}), \quad \cosh z = \frac{1}{2}(e^{z} + e^{-z})$

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

OsDY-kaavoja

Lämpöyhtälö: $u_t = \alpha^2 u_{xx}$
Laplacen yhtälö: $\nabla^2 u = 0$

Differenssikaava: Laplacen yhtälö, tasavälinen, samansuuruinen hila molemmissa suunnissa:
$4U_{i,j} = P + L + E + I$,
missä kirjaimet viittaavat ilmansuuntiin.