Mat-1.373 Matematiikan peruskurssi Y 3, syksy 1995

Apiola/Hakula

3. välikoe 11.12. 1995

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (Ke,Ko,M,Mk,P,R,S,Tf,Ti,Tu);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus.

1. Lämpötilajakautuma $u(x,t)$ 2 m pituisessa sauvassa määräytyy tehtävästä

   $\alpha^2 u_{xx} = u_t \quad (0 < x < 2, t > 0)$

   $u(0,t) = u(2,t) = 0 \quad (t > 0)$, $u(x,0) = \begin{cases} 50x, & x \in (0,1) \\ 100 - 50x, & x \in (1,2) \end{cases}$

   Olkoon $\alpha = 2.9 \times 10^{-5} m^2/s$.

   a) Määritä ratkaisu $u(x,t)$

   b) Hahmottele sauvan lämpötilaprofiilin kuvaaja tunnin ($= 3600s$) kuluttua alkuhetkestä laskemalla lämpötila sauvan (vähintään) kolmessa tasavälisesti valitussa pisteessä käyttäen sarjan kolmea ensimmäistä termiä.

   Huom: Tehtävä ei ole identtinen minkään harjoitustehtävän kanssa.

2. a) Määritä likiarvot sähköstaattiselle potentiaalille pisteissä P_{11}, P_{12}, P_{13} alueessa, jota rajoittavat johtavat metallilevyt:

   $u(x,4) = \sin \frac{\pi}{2} x$

```
       4 |-------|
         |   |   |
         |--1,3--|
         |   |   |
       2 |--1,2--| u=0
   u=0   |   |   |
         |--1,1--|
         |   |   |
       0 |-------|
         0   1   2
           u=0
```

   b) Osoita, että tarkka ratkaisu on muotoa $u(x,y) = A \sin \frac{\pi x}{2} \sinh \frac{\pi y}{2}$, määritä vakio A ja vertaa a)-kohdan tuloksia tarkan ratkaisun antamiin (äläkä hämmästy, vaikka tarkkuus ei olisi kovin hyvä).

   Vihje: Kyseessähän on Laplacen yhtälö $\nabla^2 u = 0$. Differenssimenetelmä on muotoa $U_{j,k} = (1/4)(L+E+I+P)$, missä kirjaimet viittaavat ilmansuuntiin. b)-kohdassa ei siis välttämättä tarvitse suorittaa muuttujien erottelua, kunhan osoitat ratkaisuksi.

Arvostelu: a) **4 p.**, b) **2 p.**

3. Määrittele kompleksinen exp-funktio ja osoita, että se on analyyttinen koko kompleksitasossa ja johda sen derivaatan lauseke.

4. Olkoon

$$F(z) = \frac{\cos z}{z^2 + i\frac{\pi^2}{8}}.$$

a) Missä joukossa F on analyyttinen? (**2 p.**)

b) Laske kaikki mahdolliset integraalit

$$\oint_c F(z)dz,$$

missä c on paloittain säännöllinen yksinkertainen umpinainen polku vastapäiväänkierrettynä. (**4 p.**)

Vihje: 4 tapausta sen mukaan, kiertääkö c $0, 1$ tai 2 "pahaa" pistettä. Sievennyksen suhteen riittää antaa tulos muodossa $\frac{a+ib}{c+id}$.

Mukana saa olla **ei**-ohjelmoitava laskin. Käytettävissä on myös alla oleva minirautaisannos matematiikan kaavoja.

Fourier-kaavoja

f määritelty välillä $(0, L)$.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \qquad (HS_1, HS_2)$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \qquad (HC_1 - HC_3)$$

$$f(x) = \sum_{n=1,3,..}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{2L}, \quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{2L}dx \qquad (QS_1, QS_2)$$

$$f(x) = \sum_{n=1,3,..}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{2L}, \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{2L}dx \qquad (QC_1, QC_2)$$

Integraalikaavoja

$$\int x\sin(px)dx = \frac{\sin(px) - px\cos(px)}{p^2}$$

$$\int x\cos(px)dx = \frac{\cos(px) + px\sin(px)}{p^2}$$

Trigonometrian kaavoja

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$\sin ix = i\sinh x, \quad \cos ix = \cosh x$