Mat-1.373 Matematiikan peruskurssi Y 3, syksy 1996

Apiola/Arponen

2. välikoe 19.11. 1996

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (Ke,Ko,M,Mk,P,R,S,Tf,Ti,Tu);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus.

Mukana saa olla **ei**-ohjelmoitava laskin.

Mat-1.131 KeTeMa-suorittajille:

- Jos aiot suorittaa pelkän Keteman, niin merkitse se **selvästi** koepaperiisi.
- Jos et halua vielä tehdä päätöstä, kohtelemme sinua Y3-suorittajana. Viimeistään 3. välikokeessa tulee päättää, kumman valitset.

---

1. Ratkaise alkuarvotehtävä:

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} e^t \\ e^{-t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = [5, 4]$$

Käytä ratkaisussa matriisieksponenttifunktiota. Voit hyödyntää alla olevaa MAPLE-istuntoa. (Voit toki laskea tehtävän ilmankin, kunhan käytät olennaisella tavalla hyödyksesi e^{At}:tä.)

```
> with(linalg):
> A:=matrix(2,2,[0,2,-1,3]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

```
> Eat:=exponential(A,t);
```

$$Eat := \begin{bmatrix} 2e^t - e^{(2t)} & 2e^{(2t)} - 2e^t \\ -e^{(2t)} + e^t & -e^t + 2e^{(2t)} \end{bmatrix}$$

```
> igr:=evalm(exponential(A,t-u)&*vector([exp(u),exp(-u)])):
> igr:=simplify(convert(igr,list));
```

$$igr := [2e^t - e^{(2t-u)} + 2e^{(-3u+2t)} - 2e^{(t-2u)},$$
$$-e^{(2t-u)} + e^t - e^{(t-2u)} + 2e^{(-3u+2t)}]$$

2. Muunna diff.yhtälö $y'' + \cos y = 0$ ensimmäisen kertaluvun systeemiksi. Määritä kriittiset pisteet, suorita linearisointi ja selvitä sen avulla kunkin kriittisen pisteen luonne ja stabiilisuus. Nimityksen sijasta (ja ihan mielellään myös lisäksi) kelpaa hyvin kuva, jossa on hahmoteltu muutama tyypillinen trajektori, tähän tarkoitukseen ei tarvitse ratkaista ominaisvektoreita, riittää kuvitella, että ominaisvektoreina (tai ao. Re- ja Im-osina) olisivat koordinaattiyksikkövektorit.

3. Muodosta alkuarvotehtävän
$$y'(t) = y(t), \quad y(0) = 1$$
ratkaisuapproksimaatiot pisteessä $t = 1$ Eulerin menetelmällä käyttäen askelpituuksia $h = 1/n$, kun n saa arvot $2, 4, 8$. Vertaa tuloksia tarkkaan ratkaisuun pisteessä $t = 1$ ja selvitä, käyttaytyykö virhe siten, kuin Eulerin menetelmältä voi odottaa.

4. Ratkaise Laplace-muunnosta käyttäen AA-tehtävä
$$y'' + 3y' + 2y = r(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \text{ missä } r(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$$

EHY-kaava

$$x' = Ax + f, \quad x(t_0) = \bar{x}_0$$

ratkaisu on
$$x(t) = e^{A(t-t_0)}\bar{x}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} f(\tau) d\tau.$$

Laplace-muunnoksia

Määritelmä: Annettu $f(t)$, $Lf = F$, $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ **Merk.** $u(t) = H(t)$=yksikköaskelfunktio .

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
t^k	$\frac{k!}{s^{k+1}}$	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

$$(Lf')(s) = sF(s) - f(0), \quad (Lf'')(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0),$$

$$(Lf^{(n)})(s) = s^nF(s) - s^{(n-1)}f(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

$$L\{\int_0^t f(\tau)d\tau\} = \frac{1}{s}F(s), \quad L(f * g) = (Lf)(Lg), (f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = (g * f)(t)$$

$$L\{e^{at}f(t)\} = F(s-a), \quad L\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s), \quad L\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$$

$\delta(t-a)$ tarkoittaa *Dirac'n* δ:aa.