Mat-1.373 Matematiikan peruskurssi Y 3, syksy 1996

Apiola/Arponen

1. välikoe 22.10. 1996

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (Ke,Ko,M,Mk,P,R,S,Tf,Ti,Tu);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus.

Mukana saa olla **ei**-ohjelmoitava laskin.

1. Laske sopivaa Taylorin polynomia ja siihen liittyvää virhetermiä hyväksi käyttäen likiarvo integraalille

$$\int_0^{1/2} \sqrt{x} e^x \, dx$$

siten, että virheen itseisarvo on korkeintaan 0.005.

Huom: Älä tee tehtävästä työläämpää kuin on tarpeen; osaathan integroida muotoa $\sqrt{x}p(x)$ olevan funktion, kun $p(x)$ on polynomi.

2. Olkoon annettu vektorit $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k \in \mathbf{R^n}$. Käytetään vektorin $\mathbf{v}_j$ komponentille no i merkintää v_{ij}. Kirjoita näiden vektorien lineaarikombinaatio muodossa matriisi kertaa vektori (muuta "sarakeajattelu riviajatteluksi") ja lausu yhtälösysteemin ratkaisujen olemassaoloa/lukumäärää koskevana asiana väittämät

a) "vektorit $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k$ ovat lineaarisesti riippumattomat"

b) "Annettu vektori $\mathbf{c} \in \mathbf{R^n}$ voidaan esittää vektorien $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k$ lineaarikombinaationa.

3. Olkoon $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ Katsotaan MAPLE-istuntoa:

```
> with(linalg):A:=matrix(4,4,[2,-1,2,0,0,3,-1,0,0,1,1,0,0,1,-3,5]):eigenvals(A);
              2,5,2,2
factor(charpoly(A,lambda)); # varmuuden vuoksi vielä:
```

$$(\lambda - 2)^3 (\lambda - 5)$$

Määritä, vastaavien ominaisavaruuksien dimensiot ja vertaa niitä ominaisarvojen algebrallisiin kertalukuihin. Onko matriisi diagonalisoituva?

4. Tarkastellaan vapaan vaimennetun värähtelyliikkeen diff. yhtälöä

$my'' + cy' + ky = 0$

a) Kirjoita se 1. kertaluvun systeemiksi merkitsemällä $y_1 = y, \quad y_2 = y'$.

b) Määritä vastaavan matriisin ominaisarvot ja esitä ehto, joka takaa sen, että ominaisarvot ovat reaaliset ja erisuuret. (Tässä oletetaan kaikki parametrit: m, c, k positiivisiksi.)

c) Määritä yleinen ratkaisu, kun $c = 2, m = 1/2, k = 1$.