1 Lukujonot, pikakertaus

Lähteitä:

```
Finney--Thomas: Calculus
```

1.1 Tunnettuja raja-arvoja

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- $\lim_{n\to\infty} x^{1/n} = 1, \quad x > 0$
- $\lim_{n\to\infty} x^n = 0, \quad |x| < 1$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0, \quad \forall x$

1.2 Raja-arvolauseita

Lause 1.2.1 *Olkoon* $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ *ja* $\lim_{n\to\infty} b_n = B$. *Tällöin:*

- $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$
- $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = A - B$
- $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = AB$
- $\lim_{n\to\infty}(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{A}{B}$, *jos* $B \neq 0$

Määritelmä 1.2.1 *Lukujono* (s_n) *on ylhäältä rajoitettu, jos* $\exists M$ *siten, että* $s_n \leq M \quad \forall n$.

Lause 1.2.2 *Monotonisesti kasvavalla ja ylhäältä rajoitetulla lukujonolla on raja-arvo. (Samoin pienenevällä ja alhaalta rajoitetulla.)*

1.3 Raja-arvot Maple:ssa

```
limit(f,x=a);  limit(f,x=a,dir);
dir on optionaalinen, mahd. arvot: left,right,real,complex

Esim:
limit(n^(1/n),n=infinity);
                                        1
```

Katsotaanpa, osaako MAPLE määrätä yo. raja-arvot:

```
> Limit(n^(1/n),n=infinity);
```

$$\lim_{n\to\infty} n^{\left(\frac{1}{n}\right)}$$

```
> value(");
```

$$1$$

```
> Limit(x^(1/n),n=infinity);
```

$$\lim_{n\to\infty} x^{\left(\frac{1}{n}\right)}$$

```
> value(");
```

$$1$$

```
> # Tuo toimi vähänn liiankin hyvin, eli implisiittinen oletus x>0
> Limit(x^n,n=infinity);
```

$$\lim_{n\to\infty} x^n$$

```
> value(");
```

$$\lim_{n\to\infty} x^n$$

```
> ## Tätä ei Maple voi päätellä, sillä tulos riippuu siitä, onko |x|<1 vai ei.
> ## Myöskään assume-komennot eivät näytä auttavan.
> Limit(x^n/n!,n=infinity);
```

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!}$$

```
> value(");
```

$$0$$

```
> ## Tämä tulos pätee kaikilla x, joten on luonnollista, että Maple osaa
> ##  sen.
```

2 Sarjat

Lähteitä:

```
Finney--Thomas: Calculus
Salenius: Moniste 260
```

Sarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

summalla tarkoitetaan osasummien jonon raja-arvoa, mikäli olemassa. Ts. muodostetaan jono:

$s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, ..., s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, ...$

ja tarkastellaan tämän jonon suppenemista.

2.1 Suppenemis/hajaantumistestejä

Välttämätön ehto sarjan suppenemiselle : $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Ehto ei ole riittävä.

Positiivitermiselle $(a_n \geq 0)$ sarjalle välttämätön ja riittävä suppenemisehto: **Osasummien jono ylhäältä rajoitettu**.

Itseinen suppeneminen Sarjan termien itseisarvoista muodostettu sarja on positiiviterminen. Jos tämä sarja suppenee, sanotaan: sarja **suppenee itseisesti**.

Itseisesti suppeneva sarja suppenee, käänteinen ei päde. Sarjaa, joka suppenee, mutta ei itseisesti, sanotaan **ehdollisesti suppenevaksi**. Tyypillinen esimerkki: Vuorotteleva harmoninen sarja.

Seuraavalla sivulla taulukko

Yhteenvetotaulukko sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenemiskäyttäytymisen testaamiseen

Testi	Sarjan tyyppi	Suppenee	Hajaantuu	Kommentti
Vertailu, majorantti, "ulkoinen"	$a_n > 0$	$a_n \leq c_n, kun \quad n \geq N$ ja $\sum c_n$ suppenee	$0 \leq d_n \leq a_n, kun$ $n \geq N$ ja $\sum d_n$ hajaantuu	
Suhde, lim-muoto, "sisäinen"	$a_n > 0$	$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$	$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$	$= 1$, ei johtopäätöstä
Juuri, lim-muoto, "sisäinen"	$a_n \geq 0$	$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$	$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$	$= 1$, ei johtopäätöstä
Integraali	$a_n \geq 0, \quad a_n = f(n), f(x) \geq 0$, f vähenevä ja jatkuva	$\int_1^{\infty} f(x)dx < \infty$	$\int_1^{\infty} f(x)dx > \infty$	
Leibniz, vuorotteleva	$\sum(-1)^{n+1}a_n$ $a_n \geq 0$	$a_{n+1} \leq a_n$ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$		

2.2 Tunnettuja (vertailu-)sarjoja

Yleensä annetun sarjan $\sum a_k$ n:nnelle osasummalle $\sum_{k=1}^{n} a_k$ ei saada yksinkertaista lauseketta, jonka avulla sarjan summa (tai hajaantuminen) voitaisiin selvittää.

Kuitenkin on joukko tunnettuja sarjoja, joille näin voidaan tehdä tai ainakin päätellä niiden suppeneminen/hajaantuminen. Näitä tunnettuja sarjoja voidaan käyttää vertailutestien yhteydessä uusien sarjojen suppenemistarkasteluihin.

- **Geometrinen sarja**
- **"Teleskooppisarja"**
- $p-$**harmoniset sarjat**