```
> #Y3 harj. 1 loppuviikko ratkaisut
>
> t0:=taylor(exp(x),x=0,1);
  t1:=taylor(exp(x),x=0,2);
  t2:=taylor(exp(x),x=0,3);
  t3:=taylor(exp(x),x=0,4);
```

$$t0 := 1 + O(x)$$

$$t1 := 1 + x + O(x^2)$$

$$t2 := 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)$$

$$t3 := 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + O(x^4)$$

```
> # Pudotetaan jäännöstermit pois:

  p0:=convert(t0,polynom): p1:=convert(t1,polynom): p2:=convert(t2,polynom):
  p3:=convert(t3,polynom);
```

$$p3 := 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$$

```
> #Kaksoispiste loppumerkkinä estää tulostuksen, riville voi laittaa monta
  # komentoa.
```

```
> plot({exp(x),p0,p1,p2,p3},x=-3..2,title=‘exp(x) ja Taylorin polynomit p0,p1,p2,p3
  ‘);
```

```
> #
> x:=’x’:N:=5;jono:=seq(convert(taylor(exp(x),x=0,n+1),polynom),n=0..N);
```

$$N := 5$$

$$jono := 1,\ 1 + x,\ 1 + x + \frac{1}{2}x^2,\ 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3,\ 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4,$$
$$1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5$$

```
> # x:=’x’: oli vain varmuustoimenpide, siltä varalta, että x:ssä olisi sattunut
> #          olemaan jotain roskaa.
> plot({exp(x),jono},x=-6..2,y=-2..8);
```

```
> plot({exp(x),jono},x=-6..2,hyyy=-2..8);
```

```
> ## y-arvoaluetta voi rajoittaa, kuten yllä Symboli y ei ole missään roolissa,
> ## sen voi jättää pois tai korvata vaikka hyyy:llä
> plot({exp(x),jono},x=-6..2,-2..8);
```

```
>
> ##################################################################
```

> Teht. 2
> ;;;
;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;

$$Teht2$$

> f:=sin(x); x0:=Pi/4; n:=6; vali:=[0,Pi/2];

$$f := \sin(x)$$

$$x0 := \frac{1}{4}\pi$$

$$n := 6$$

$$vali := \left[0, \frac{1}{2}\pi\right]$$

> t6:=taylor(f,x=x0,7);

$$t6 := \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) - \frac{1}{4}\sqrt{2}\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)^2 - \frac{1}{12}\sqrt{2}\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)^3 + \frac{1}{48}\sqrt{2}\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)^4 + \frac{1}{240}\sqrt{2}\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)^5 - \frac{1}{1440}\sqrt{2}\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)^6 + \mathrm{O}\left(\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)^7\right)$$

> p6:=convert(t6,polynom):

> #Ylä̈rajafunktio g(x)
>
>
> g:=-(x-Pi/4)^7/7!;

$$g := -\frac{1}{5040}\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)^7$$

> err:=f-p6; # Todellinen virhe

$$err := \sin(x) - \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) + \frac{1}{4}\sqrt{2}\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)^2 + \frac{1}{12}\sqrt{2}\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)^3 - \frac{1}{48}\sqrt{2}\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)^4 - \frac{1}{240}\sqrt{2}\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)^5 + \frac{1}{1440}\sqrt{2}\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)^6$$

> plot({g,err},x=0..Pi/2,title='Teht. 2 a) todellinen virhe ja ylä̈raja-arvio');
>
> # Teht. 2b)
> f:=ln(cos(x)); x0:=0; n:=6; vali:=[0,Pi/6];

$$f := \ln(\cos(x))$$

$$x0 := 0$$

$$n := 6$$

$$vali := \left[0, \frac{1}{6} \pi \right]$$

```
> t6:=taylor(f,x=x0,7);p6:=convert(t6,polynom):
```

$$t6 := -\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{12} x^4 - \frac{1}{45} x^6 + \mathrm{O}(x^7)$$

```
> df7:=diff(f,x$7);
```

$$df7 := -272 \frac{\sin(x)}{\cos(x)} - 1232 \frac{\sin(x)^3}{\cos(x)^3} - 1680 \frac{\sin(x)^5}{\cos(x)^5} - 720 \frac{\sin(x)^7}{\cos(x)^7}$$

```
> plot(df7,x=0..Pi/6);
> #Kuvan perusteella nähdään, että itseisarvoltaan suurin saadaan oikeassa
> # päätepisteessä Pi/6
>
> subs(x=Pi/6,df7);
```

$$-272 \frac{\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right)}{\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right)} - 1232 \frac{\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right)^3}{\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right)^3} - 1680 \frac{\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right)^5}{\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right)^5} - 720 \frac{\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right)^7}{\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right)^7}$$

```
> M:=evalf(");
```

$$M := -517.3058414$$

```
>
```

```
> g:=(M/(7!))*x^7;
```

$$g := -.1026400479\, x^7$$

```
> err:=f-p6;
```

$$err := \ln(\cos(x)) + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{12} x^4 + \frac{1}{45} x^6$$

```
> plot({g,err},x=0..Pi/6);
```

```
> subs(x=Pi/6,g-err);
```

$$-.3666554066\ 10^{-6}\, \pi^7 - \ln\left(\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right)\right) - \frac{1}{72}\pi^2 - \frac{1}{15552}\pi^4 - \frac{1}{2099520}\pi^6$$

```
> evalf(");
```

$$-.001065563485$$

```
> #Pahimmillaan yläraja-arvio ja todellinen virhe eroavat tämän verran
> # (välin päätepisteessä)
> evalf(subs(x=Pi/6,err));
```

$$-.0000418436148$$

```
> evalf(subs(x=Pi/6,g/err));
```

$$26.46537227$$

```
> # Pahimmillaan yläraja-arvio antaa 26.5-kertaisen arvon.
> # Tämä selittyy 7. derivaatan voimakkaalla kasvulla (itseisarvon)
> # siirryttäessä kohti päätepistettä (oikea
> xi;
```

$$\xi$$

```
> # on aivan muualla).
>
> #######################################################
> Teht. 3
> ;;;;;;;;;;;;
```

$$Teht3$$

```
> s1:=sum(1/k^3,k=1..1);
```

$$s1 := 1$$

```
> s2:=sum(1/k^3,k=1..2);
```

$$s2 := \frac{9}{8}$$

```
> s3:=sum(1/k^3,k=1..3);
```

$$s3 := \frac{251}{216}$$

```
> evalf([s1,s2,s3]);
```

$$[1., 1.125000000, 1.162037037]$$

```
> for n to 10 do evalf(sum(1/k^3,k=1..n)) od;
>
>
```