[>

Teht. 3, puolikkaat ja vartit

Puolikkaat taitavat jo olla aika tuttuja, kyseessä ovat tavalliset sini- ja kosinisarjat

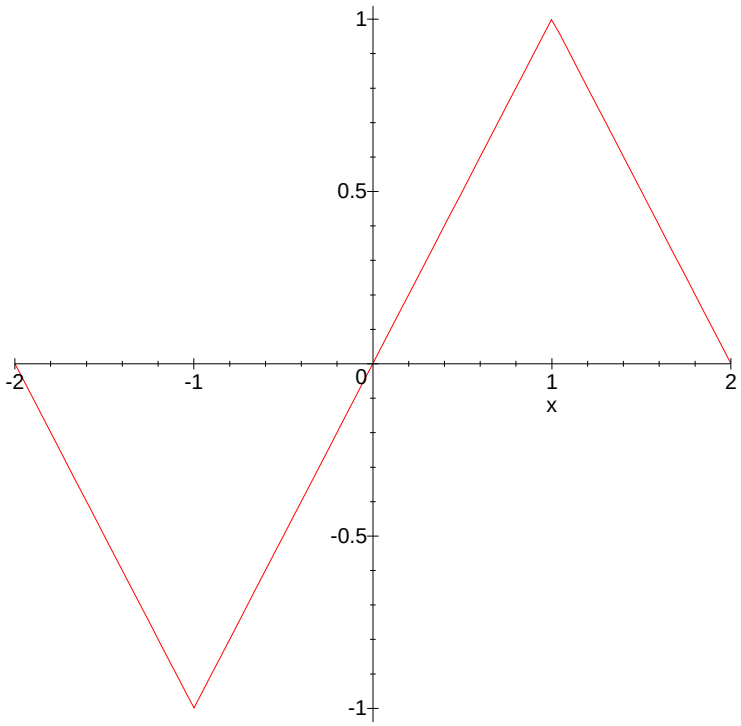
Varttisini

Otetaan jakson puolikkaaksi l=1.

```
> f4s:=piecewise(-2 < x and x < -1,-(x+2),-1 < x and x < 1 ,x,1 <
  x and x < 2,-(x-2));
```

$$f4s := \begin{cases} -2-x & -2-x<0 \textbf{ and } x+1<0 \\ x & -1-x<0 \textbf{ and } x-1<0 \\ -x+2 & 1-x<0 \textbf{ and } x-2<0 \end{cases}$$

```
> plot(f4s,x=-2..2);
```




```
> b[n]:=(2/l)*int(f(x)*sin(n*Pi*x/(2*l)),x=0..l);
```

$$b_n := 2\frac{\int_0^l \mathrm{f}(x)\sin\left(\frac{1}{2}\frac{n\,\pi\,x}{l}\right)dx}{l}$$

```
> b[n]:=simplify(eval(subs(l=1,f(x)=x,b[n])));
```

$$b_n := -4\,\frac{-2\sin\left(\frac{1}{2}n\pi\right)+n\pi\cos\left(\frac{1}{2}n\pi\right)}{n^2\pi^2}$$

```
> b2n:=subs(n=2*n,b[n]);
```

$$b2n := -\frac{-2\sin(n\pi)+2n\pi\cos(n\pi)}{n^2\pi^2}$$

```
> b2n:=subs(sin(n*Pi)=0,cos(n*Pi)=(-1)^n,b2n);
```

$$b2n := -2\,\frac{(-1)^n}{n\pi}$$

```
> b2nm1:=subs(n=2*n-1,b[n]);
```

$$b2nm1 := -4\,\frac{-2\sin\left(\frac{1}{2}(2n-1)\pi\right)+(2n-1)\pi\cos\left(\frac{1}{2}(2n-1)\pi\right)}{(2n-1)^2\pi^2}$$

```
> b2nm1:=subs(cos((2*n-1)*Pi/2)=0,b2nm1);
```

$$b2nm1 := 8\,\frac{\sin\left(\frac{1}{2}(2n-1)\pi\right)}{(2n-1)^2\pi^2}$$

Siis sinisarjan kertoimet:

```
> b[2*n]=b2n;b[2*n-1]=b2nm1;
```

$$b_{2n} = -2\,\frac{(-1)^n}{n\pi}$$

$$b_{2n-1} = 8\,\frac{\sin\left(\frac{1}{2}(2n-1)\pi\right)}{(2n-1)^2\pi^2}$$

Varttisinisarja saa siis muodon (käytetään alunperin laskettuja b[n]-kertoimia, jotka näyttävät monimutkaisemmilta,
mutta ne voidaan laskea samalla kaavalla.

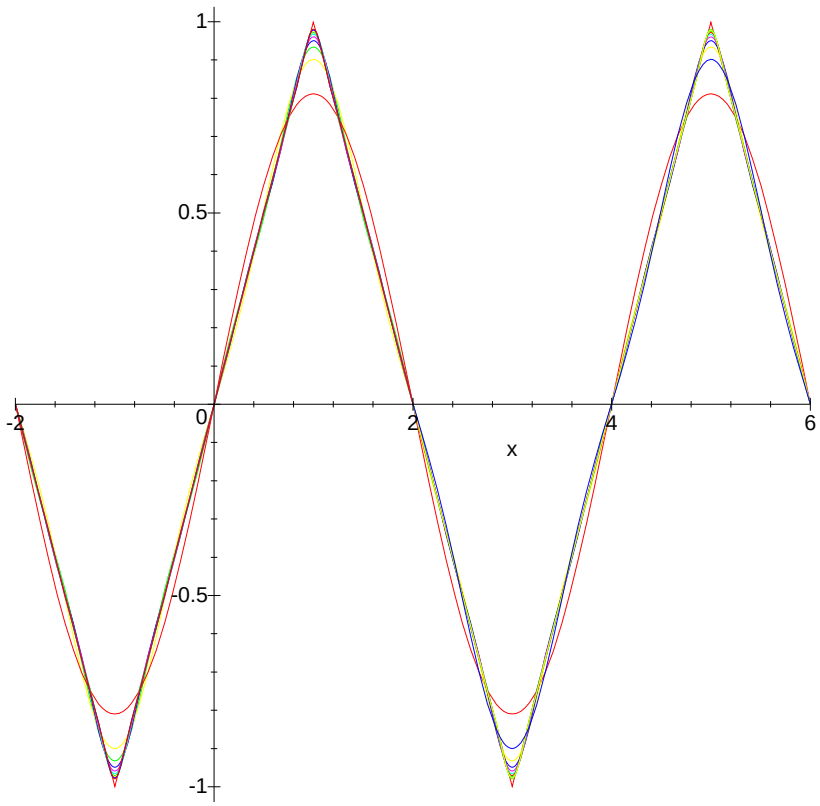
```
> varttsini:=sum(subs(n=2*k-1,b[n]*sin(n*Pi*x/2*l)),k=1..infinity
  );
```

$$varttsini := \sum_{k=1}^{\infty}\left(-4\,\frac{\left(-2\sin\left(\frac{1}{2}(2k-1)\pi\right)+(2k-1)\pi\cos\left(\frac{1}{2}(2k-1)\pi\right)\right)\sin\left(\frac{1}{2}(2k-1)\pi x\,l\right)}{(2k-1)^2\pi^2}\right)$$

```
> subs(n=2*k-1,b[n]);
```

$$-4\,\frac{-2\sin\left(\frac{1}{2}(2k-1)\pi\right)+(2k-1)\pi\cos\left(\frac{1}{2}(2k-1)\pi\right)}{(2k-1)^2\pi^2}$$

```
> l:=1:varttisummat2:=seq(sum(subs(x=x-4,n=2*k-1,b[n]*sin(n*Pi*x/
  2*l)),k=1..N),N=1..10):
> summapl:=plot({varttisummat},x=-2..2):
> fpl:=plot(f4s,x=-2..2):
> varttisummat:
> fpl2:=plot(subs(x=x-4,f4s),x=2..6):
> summapl2:=plot({varttisummat2},x=2..6):
> with(plots):
> display({fpl,fpl2,summapl,summapl2});
```




```
>
```

Siinänyt komeilee neljännesjakson sinilaajennus ja Fourier-sarja, tuo paljon puhuttu varttisini kahden jakson alueella.
Siinäoli hieman käsityötä, mutta kylläkannatti!
Varttikosinin voi tehdäaivan vastaavasti