Mat-1.373 Matematiikan peruskurssi Y 3, syksy 1996

9. harj. viikko 46 (11 – 15.11)

```
GREE: CH 12 (Laplace) ja CH10:n alku (Fourier-sarjat)
KRE: CH 6 (Laplace) ja CH10:n alku (Fourier-sarjat)

Maple: with(inttrans): # V.4  (readlib(laplace)  # V.3)
laplace, invlaplace, convert(lauseke,parfrac,muuttuja);
alias(L=laplace,IL=invlaplace);  # kätevä, muttei ''pakollinen''
# Konvoluutio (oma funktio):
konv:=(f,g,t)->int(f(_tau)*g(t-_tau),_tau=0..t);
#
Kts.: Kotisivun Maple-ohjeita
```

Alkuviikko

1. Muodosta osamurtokehitelmät ja Laplace-käänteismuunnokset. Käytä tarpeen mukaan sopivaa siirto- ("shift-") lausetta tai jotain muuta sopivaa (integraalin L-muunnos, L-muunnoksen derivaatta etc.).

   a) $F(s) = \frac{s^2+3}{s(s^2+4)}$, b) $F(s) = \frac{s+2}{s(s-1)^3}$, c) $F(s) = \frac{1}{s^3(s^2+2)}$

   Voit halutessasi tarkistaa MAPLE:n `convert(lauseke,parfrac,s)`-komennolla .

2. Osoita $s-$ *siirtolausetta* käyttäen (lausumalla hyperboliset funktiot exp-muodossa), että

   a) $L\{\cosh at \cos at\} = \frac{s^3}{s^4+4a^4}$,

   b) $L\{\sinh at \cos at\} = \frac{a(s^2-2a^2)}{s^4+4a^4}$.

3. Integraaliyhtälössä tuntematon funktio (tässä $y(t)$) esiintyy integraalin sisällä. Ratkaise seuraava integraaliyhtälö Laplace-muunnosta ja konvoluutiolausetta käyttäen:

   $y(t) = \sin t + \int_0^t y(\tau)\sin(t-\tau)d\tau$

4. Ratkaise harj. 8 loppuviikon tehtävät 3 ja 5 "käsin".

   $$y'' + 4y' + 13y = 20e^{-t}, \quad y(0) = 1, y'(0) = 3 \quad , \ddot{x} + 2\dot{x} = H(t-1), \quad x(0) = 0, \dot{x}(0) = 1$$

   . Tehtävässä 3 kannattaa hakea osamurtokehitelmää muodossa $\frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+\ldots}$.

5. Esitä funktiot a) $1/(1-x)$, b) $1/(1-x^2)$, c) e^{kx}

   parillisen ja parittoman funktion summana. Piirrä kunkin funktion sekä vastaavan parillisen ja parittoman osan kuvaaja.

   Muistathan: Parillinen: $f(-x) = f(x)$, pariton: $f(-x) = -f(x)$

   Vihje: Malliksi yleiseen tilanteeseen sopii se, miten exp-funktio esitetään cosh (parillinen) ja sinh (pariton) funktioiden summana. (Mitään muuta "teoriaa" tähän ei tarvita.)

6. Olkoon $f(x) = x, \quad x \in (-\pi, \pi], \quad f(x+2\pi) = f(x)$. Piirrä f:n kuvaaja muutaman jakson alueella. Muodosta f:n Fourier-sarja. Piirrä muutamien osasummafunktioiden $s_1(x), s_2(x), s_3(x), \ldots$ kuvaajat samaan kuvaan f:n kanssa.

   Huom! Tämä voidaan laskea suoraan alla olevia kaavoja soveltaen, vaikka Fourier-sarjoista ei olisi ennakkotietoja.

Loppuviikko

1. Tarkastellaan luennolla käsiteltyä virtapiiritehtävää: $Ri' + (1/C)i = e'(t)$, missä $i(0) = 0$ ja $e(t)$ kasvaa äkillisesti (lineaarisest) 0:sta arvoon e_0 ajassa ε jääden e_0:aan ikiajoiksi.

   Ratkaise virta $i(t;\varepsilon)$ (Gree s. 564 kaava (22)) ja määritä $\lim_{\varepsilon\to 0} i(t,\varepsilon)$, kun $t = 0$ ja $t > 0$ (kaava 23). (Tämä on helppoa ainakin tarkkaavaisille luennolla kävijöille.)

   Voit hyödyntää MAPLE:a (tietenkin). Huomaa, että V.4-versiossa voit myös käyttää `addtable`-komentoa, jos sattuisi, että MAPLE:n `laplace/invlaplace` eivät jotain tunne (tai jos kyseessä on symbolisen (määrittelemättömän) funktion muunnos). (En tiedä, onko tämä tässä tarpeen ...)

2. Jaksollisen (jakso$=T$) funktion f Laplace-muunnos F saadaan kaavasta:

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T e^{-st} f(t)\,dt$$

   Kirjoita MAPLE-funktio `lapjaks` (voit keksiä paremmankin nimen), joka implementoi tämän kaavan. Voit tehdä sen ainakin kahdella vaihtoehtoisella tyylillä: `lapjaks:=(f,T,s)->...` tai `lapjaks:=(laus,t,T,s)->....` Edellisessä f on määriteltävä MAPLE:ssa funktioksi ja jälkimmäisessä se on lauseke, jolloin t ilmoittaa symbolin, jota pidetään muuttujana. Edellisessä tapauksessa integroimismuuttuja on luonteeltaan lokaali muuttuja, mutta koska tämäntyylinen määrittely ei salli lokaaleja (ainakaan V.3:ssa), voidaan ottaa jokin "omituisenniminen" symboli, kuten vaikkapa $\_\tau$.

   Kokeile funktiotasi ensin joihinkin tunnettuihin jaksollisiin, kuten sin ja cos.

   Määritä sitten seuraavien jaksollisten funktioiden Laplace-muunnokset: (sekä käsin että `lapjaks`-funktiollasi).

   - a) "Sahalaitafunktio": $f(t) = \frac{k}{p}t, \quad 0 < t < p, \quad f(t+p) = f(t)$
   - b) Puoliaaltotasasuunnattu siniaalto:

$$f(t) = \begin{cases} \sin \omega t, & 0 < t < \pi/\omega \\ 0, & \pi/\omega < t < 2\pi/\omega \end{cases}$$

     (jatkuu $\frac{2\pi}{\omega}$-jaksoisena).

3. Ratkaise vaimennettu värähtelytehtävä:

$$x'' + 2x' + x = \delta(t) - H(t - 2\pi), x(0) = 0, x'(0) = 0.$$

   Tässä herätteenä (ulkoisena voimana) on impulssi (vasaranisku) hetkellä $t = 0$ ja vakiovoima -1 ajanhetkestä $t = 2\pi$ alkaen. Piirrä ratkaisufunktio vaikkapa välillä $[0, 25]$.

4. Tarkastellaan vaimennettua harmonista värähtelyä

$$y'' + 3y' + 2y = r(t)$$

missä herätettä $r(t)$ vaihdellaan:

a) $r_1(t) = 1, t \in [0,1], \ \ 0$ muuten (yksittäinen neliöaalto), b) $r_2(t) = t, t \in [0,1], \ \ 0$ muuten , c) $r_3(t) = 10, t \in [0,5] \cup [10,15] \cup [20,25]$

Määritä ratkaisu (vaste) y(t) kussakin tapauksessa alkuehdoilla $y(0) = y'(0) = 0$. Piirrä samaan kuvaan heräte ja vaste.

Voit käyttää MAPLE-komentoa `dsolve({dy,y(0)=0,D(y)(0)=0},y(t),method=laplace)`

5. Vaimentamaton pakotettu värähtelyliike, jossa pakkovoima on sinimuotoinen värähtely, voidaan mallintaa yhtälöllä

$$y'' + \omega_0^2 y = K \sin \omega t$$

Johda Laplace-muunnostekniikalla (vaiheittain, ei dsolvella) ratkaisut tapauksissa a) ei resonanssi ($\omega \neq \omega_0$) ja b) resonanssi ($\omega = \omega_0$). Ota alkuarvoiksi $y(0) = y'(0) = 0$. Suorita johto siis yleisiä symboleja käyttäen.

Huom: Jos MAPLE:ssa on symbolit ω ja ω_0, niin MAPLEpitää niitä erisuurina, ellei "samaisteta"niitä (esim. sijoitus- assume- tms. komennolla). Resonanssitapauksessa voi olla tarpeen mm. sievennyskomento `convert(lauseke,trig)`.

6. Kehitä funktio $f(x) = \begin{cases} 100, & -4 < x < -2 \\ 0, & -2 \leq x \leq 4 \end{cases}$, $f(x+8) = f(x)$. Fourier-sarjaksi ja piirrä osasummien kuvaajia.

Laplace-muunnoksia

Määritelmä: Annettu $f(t)$, $Lf = F$, $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ **Merk.** $u(t) = H(t)$=yksikköaskelfunktio .

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
t^k	$\frac{k!}{s^{k+1}}$	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

$$(Lf')(s) = sF(s) - f(0), \quad (Lf'')(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0),$$

$$(Lf^{(n)})(s) = s^nF(s) - s^{(n-1)}f(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

$$L\{\int_0^t f(\tau)d\tau\} = \frac{1}{s}F(s), \quad L(f*g) = (Lf)(Lg), (f*g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = (g*f)(t)$$

$$L\{e^{at}f(t)\} = F(s-a), \quad L\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s), \quad L\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$$

$\delta(t-a)$ tarkoittaa *Dirac'n* δ:aa.

Fourier-kaavoja

Yleinen tapaus, f määritelty välillä $(-L, L)$

$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$
$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$

Puolen jakson laajennukset,f määritelty välillä $(0, L)$

Sinisarja

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \qquad (HS_1, HS_2)$$

Kosinisarja

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \qquad (HC_1 - HC_3)$$