Mat-1.373 Matematiikan peruskurssi Y 3, syksy 1996

7. harj. viikko 44 (28.10 – 1.11)

Muista: Luento pe 25.10 on peruutettu, kaikki harjoitukset pidetään normaalisti.

```
KRE: CH 20 s. 1034 ->  Numerical methods for DE
TE: DYS-monistetta, www:ssä ( linkki: Oppikirjoja ...)
    ss. 54--55, attraktorit (Lorenzin attraktori)
    ss. 56--60 Numeerisia menetelmiä (paikoin hieman avanseerattu?)
Tehtäväpaperissa on aika paljon reseptejä.
Matlab-ohjeita: kotisivun kohdasta:
            Oppikirjoja, ohjelmisto-oppaita ja -linkkejä
```

Muista: **Linearisointi** tapahtuu laskemalla kriittiset pisteet. Jos $\mathbf{p_0}$ on KRP, niin linearisoidun systeemin matriisi on diff.yhtälön määrittelevän (vektoriarvoisen) funktion $\mathbf{f}$ Jacobin matriisi $(\frac{\partial}{\partial y_j} f_i(y_1, ...y_n))$

Alkuviikko

1. Ratkaise alkuarvotehtävä $x' = t^2 - x, \quad x(0) = 2$ Eulerin menetelmällä. välillä $[0, 0.2]$ käyttäen a.) askelpitutta $h = 0.2$ (vain yksi jakoväli) ja b.) askelpituutta $h = 0.1$ (kaksi jakoväliä).

   Vertaa ratkaisua tarkkaan ratkaisuun pisteessä $t = 0.2$. Käyttäytyykö virhe odotetulla tavalla, kun askelpituus puolitetaan? (Ei varmasti tarvita tietokonetta)

2. Ratkaise AA-tehtävä $y' + 5t^4y^2 = 0, \quad y(0) = 1$ Eulerin menetelmällä [1]

   käyttäen askelpituutta $h = 0.2$ ja 10 askelta. Voit kynä-paperi-laskin-välineistön lisäksi/sijasta käyttää vaikkapa seuraavan tyylisiä MAPLE-komentoja:

   ```
   t:='t':y:='y':  # Varmuustoimenpide, vapautetaan mahd. vanhoista arvoista.
   f:=(t,y)->-5*t^4*y^2; # Diff. yhtälön määrittelvä funktio (ihan oikea funktio)
   h:=0.2:N:=10;
   t[0]:=0: y[0]:=1;
   for n from 0 to N do
     y[n+1]:= ... ;
     t[n+1]:= ... ;
   od;
   ```

   Ratkaise tehtävä myös analyyttisesti ja vertaa Eulerin approksimaatioita tarkkaan ratkaisuun. (Alkuviikolla riittää käsin laskien ottaa pienempi N. Loppuviikolla jatketaan lisää MAPLE:lla.)

3. Kirjoita kertalukua 5 oleva Taylorin menetelmä [2] yhtälön $x' = x + e^t + tx, \quad x(1) = 2$ ratkaisemiseksi. Laske käsin yksi tai kaksi askelta , kun $h = 0.1$. (Tässä tapauksessa derivaatat eivät paisu, voit silti käyttää myös MAPLE:a derivoimiseen.)

---

[1] $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n), \quad y(t_0) = y_0,$ GKV $= O(h)$ (GKV=**G**lobaali **k**atkaisu**v**irhe)

[2] $y(t+h) = y(t) + hy'(t) + ... + \frac{h^p y^{(p)}}{p!} + O(h^{p+1})$, missä $y'(t) = f(t, y(t)), y''(t) = \frac{d}{dt} f(t, y(t))$ (eli derivoidaan ketjusäännön avulla, sijoitetaan y'(t):n paikalle $f(t, y(t))$ ja jatketaan näin.

MAPLE:lla voisi edetä tähän tapaan:

```
f:=(t,x)->exp(t)+x+t*x; d1f:=diff(f(t,x(t)),t);
d1f:=subs(diff(x(t),t)=f(t,x(t)),d1f));   # jne.
collect(df1,exp(t)); collect(",x(t));
### collect on hyödyllinen sievennyskomento, kun halutaan kerätä jonkin
### lausekkeen kerroin (kuten esim. potenssin tms.)
```

Jatkoa tietokoneteht x:ssä.

4. Sovella klassista Runge-Kuttaa yhden askeleen verran (askelpituus = h) alkuarvotehtävään $x' = -\lambda x,\ \ x(0) = 1$ ja totea, että (lokaali) virhe on $O(h^5)$.

5. Tarkastellaan lineaarista systeemiä $x' = Ax$, missä $A = \begin{bmatrix} 998 & 1998 \\ -999 & -1999 \end{bmatrix}$

   Voit käyttää seuraavaa (tiivistettyä) MATLAB-tulostusta hyväksesi:

```
>> [V,D]=eig(A)
V =                           D =                 [V(:,1)/V(1,1),(V(:,2)/V(1,2)]

   0.8944   -0.7071           -1         0             1.0000    1.0000
  -0.4472    0.7071            0     -1000            -0.5000   -1.0000
```

   Kankeus

   Tehtävää, jonka (Jacobin) matriisin ominaisarvot ovat negatiiviset ja itseisarvoltaan suurimman ja pienimmän suhde on suuren suuri, sanotaan *kankeaksi ("stiff")*.

   Muodosta alkuarvotehtävän $x' = Ax, x(0) = [1, 1]$ tarkka ratkaisu.

   Laske Eulerin menetelmällä likiarvoja käyttäen askelpituutta $h = 0.1$ alkupisteestä lähtien muutama. Kankeus on syynä näihin hankaluuksiin.

6. Tarkastellaan Lorenzin systeemiä:

$$\begin{cases} x' = 10(y - z) \\ y' = x(28 - z) - y \\ z' = xy - (8/3)z \end{cases}$$

   Määritä sen tasapainopisteet ((TP) eli (KRP)) ja linearisoidun systeemin (eli Jacobin matriisin) ominaisarvot tasapainopisteissä.

Loppuviikko

1. Tee alkuviikon tehtävä 1 loppuun seuraavantyylisesti: Katso kurssin kotisivun kohdasta "*Ohjelmakoodeja,* MAPLE-*koodeja*" funktion `Euler` määritelmä, leikkaa ja liimaa MAPLE-istuntoosi ja tee sen avulla kuva/kuvia sekä tulostaulukko. Ratkaise erityisesti ko. AA-tehtävä välillä $[0, 5]$ käyttäen askelpituuksia $m = 3, 6, 12, 24$.

Ratkaise myös analyyttisesti. Piirrä analyyttinen ratkaisu ja arvoilla 12 ja 24 saatavat samaan kuvaan. Mieti, miksi m=3 ja m=6 räjähtävät.

Ohje: MAPLE:n dsolvelle voi antaa myös suoraan alkuehdon `dsolve({dyht,y(0)=1},y(t))`; Piirto voisi käydä vaikka tähän tapaan:

```
tarkka:=plot(rhs(ratk),t=0..5,color=red):
e12:=Euler(...,12);p12:=plot([e12]):...
display({tarkka,p12,p24});
```

"Vapaaehtoinen" lisätehtävä: Kokeile samalta sivulta löytyvää `RK4`- funktiota.

2. Tee edellinen tehtävä MATLAB-funktioilla `Euler` sekä myös funktiolla `rk4` . [3]

   Ne saat kotisivun "Ohjelmakoodeja"-kohdasta. (Windows:ssa: Hiiren vasemmalla maalataan, CTR-C, hiiri kohteeseen, CTR-V. "Kohde" on MATLAB:n file-valikosta löytyvä OPEN tai NEW, jolla pääsee editoriin. Voit toimia seuraavaan tapaan:

```
hold on,grid,m=3;
[T,Y]=meuler('f6',a,b,ya,m);plot(T,Y);[T',Y'],if m<=30,plot(T,Y,'ow');end;m=2*m
```

   Piirrä samaan kuvaan myös edellisessä tehtävässä saatu tarkka ratkaisu.
   `t=linspace(0,5);y=1./(t.^ 5+1);plot(t,y)`

3. Klassinen saalis-saalistaja-ongelma ("ketut ja jänikset", Volterran-Lotkan malli) on seuraavanlainen: Alueella on kahdenlaisia eläimiä, joiden määrää merkitään r:llä ja f:llä (r=rabbit, f=fox). Ajatellaan r:n suhteellisen muutosnopeuden olevan

   $\frac{r'}{r} = 2 - \alpha f$ ja f:n suhteellisen muutosnopeuden $\frac{f'}{f} = -1 + \alpha r$.

   (Tässä siis r edustaa saaliseläintä, joka ilman saalistajaa lisääntyy eksponentiaalisesti, kun taas f on saalistaja, joka elää syömällä r:ää ja nääntyy nälkään, jos saalista r ei ole lainkaan.)

   Kirjoita systeemi .m-tiedostoksi, jotta voit käyttää MATLAB-ratkaisijaa. Tutki systeemin käyttäytymistä arvolla $\alpha = 0.01$

   a) Laske erityisesti ratkaisut, kun $r_0 = 300, \quad f_0 = 150$. Piirrä sekä aikariippuvuus että faasitasokuva. Havainto: jaksollisuus, mikä on jakson pituus? Kokeile sekä ode23 että ode45-ratkaisijoita.

   b) Piirrä lisää faasitasokäyriä. (Muista MATLAB-komento `hold on`.) eri alkuarvoilla $r(0) = r_0, \quad f(0) = f_0$ vaihdellen muutamasta yksilöstä useisiin tuhansiin.

   c) Ratkaise systeemin tasapainopisteet ja niiden luonne linearisoimalla.

   Huom: MATLAB:n `odedemo` liittyy tähän samaan teemaan. Tässä näkyy yllätys: ode23 voi antaa tarkemman tuloksen.

---

[3]RK4–Klassinen Runge-Kutta: $\begin{cases} k_1 = hf(t_n, x_n) \\ k_2 = hf(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_1}{2}) \\ k_3 = hf(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_2}{2}) \\ k_4 = hf(t_n + h, x_n + k_3) \\ x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{cases}$ GKV$= O(h^4)$

Stabiilisuus

Yhtälöä sanotaan `stabiiliksi` pisteessä (t, y), jos $f_y(t, y) < 0$ Numeerinen menetelmä on stabiili, jos kokonaisvirhe pysyy rajoitettuna. Tämä merkitsee Eulerin menetelmän kohdalla ehtoa:
$-2 < hf_y(t, y) < 0$

4. Tarkastellaan yhtälöä $y' = -2\alpha(t-1)y$. Ratkaisuparvi on $y = C\exp(-\alpha(t-1)^2)$.

   Totea kuvasta ja derivaattaehdosta yhtälön stabiilisuus/epästabiilisuusalueet.

   Piirrä ratkaisuparvi (ota vaikkapa $\alpha = 5$).

   Tutki tämän yhtälön ratkaisemista yllä harjoitellulla tavalla, muuttelemalla askelpituutta. Piirrä lisäksi ratkaisukäyrä. Selvittele stabiilisuukysymyksiä ylla esitettyihin seikkoihin huomiota kiinnittäen ja yritä nähdä kuvista mahdollisimman paljon valaistusta. Sopivia arvoja voisivat olla vaikkapa $h = 0.2$, väli: $[1, 4.5]$, $y(1) = 1$.

   Tämä sopii niin MATLAB-kuin MAPLE-tehtäväksi. Luultavasti MATLAB-työskentely on hieman joustavampaa ja vuorovaikutteisempaa (makuasia ehkä).

5. (Lorenzin attraktori) Piirrä AV teht. 6:n faasiavaruuspiirroksia käyttäen hyväksi MATLAB:n ode23- tai ode45-funktioita. Katselupistettä voit muuttaa `view`- komennolla. Piirrä sopivasti projektioita aliavaruuksille ja tunnista ominaisarvojen ja -vektorien avulla stabiilit ja epästabiilit aliavaruudet (koskien linearisoitua systeemiä). Mieti muutenkin, miten trajektorit käyttäytyvät.

   Huom: MAPLE:ssa on funktio `linalg[jacobian]`, jolla voit vaivattomasti muodostaa Jacobin matriisin.

6. Tässä voi katsella jotain aiemmin tekemättä jäänyttä tehtävää (kuten heiluri, tms.)