Mat-1.373 Matematiikan peruskurssi Y 3, syksy 1996

6. harj. viikko 43 (21 – 25.10.)

- Greenberg:ss. 183 – 189
- Kreyszig 7^{th} ed. ss. 158 – 183
- Eirola: DYS-monistetta, prujuissa ja www:ssä (linkki: Oppikirjoja ...)
- Linearisoinnista puhutaan luennolla kenties hieman enemmän kuin missään yllä mainituista lähteistä

Alkuviikko

1. Laske e^A matriisille $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ Voit hyödyntää seuraavaa MAPLE-istuntoa:

```
> A:=matrix(3,3,[2, 1, 0,1 , 2, 1,0, 1, 2]):
> eigenvals(A);
```

$2, 2+\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}$

```
> ev:=eigenvects(A);

  [2, 1, {[ -1, 0, 1 ]}],
                        2                                 2
         [RootOf(_Z   - 4 _Z + 2), 1, {[ 1, RootOf(_Z   - 4 _Z + 2) - 2, 1 ]}]
```

Jostain syystä eigenvects jättää joskus jopa toisen asteen yhtälöt `RootOf`-muotoon, vaikka eigenvals laskeekin loppuun. Pakotetaan MAPLEyrittämään:

```
> map(allvalues,ev[2]);
         1/2        1/2              1/2                    1/2
  [2 + 2    , 2 - 2    , 1, {[ 1, 2    , 1 ]}, {[ 1, - 2    , 1 ]}]
#  Tätä tulostusta täytyy nyt osata lukea oikein. Kannattaa yleensä myös
#  verrata numeeriseen:
> eigenvects(convert(op(A),float));
       [.5857864374, 1, {[ .5000000000, -.7071067813, .5000000001 ]}],
                                                                -9
           [2.000000000, 1, {[ -.7071067808, -.14*10   , .7071067812 ]}],
           [3.414213564, 1, {[ .4999999998, .7071067814, .5000000002 ]}]
```

Voit tarkistaa tuloksesi MAPLE:n `exponential`-funktiolla.

2. Laske e^{At} matriiseille a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

   Vast: b)$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) $e^{At} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$

3. Määritä vapaan (HY) vaimennetun värähtelyn:

$$x'' + \frac{c}{m}x' + \frac{k}{m}x = 0$$

   kriittisen pisteen (0,0) luonne tapauksissa

   a) ei vaimennusta, $c = 0$, b) alivaimennus, $c^2 < 4mk$,
   c) kriittinen vaimennus, $c^2 = 4mk$, d) ylivaimennus, $c^2 > 4mk$.

   Muista: Harj. 5 tehtävässä 3 olet sen jo kirjoittanut 1. kl. systeemiksi Hahmottele faasitasokuviotyyppi kussakin tapauksessa. Teoriaa et juuri tarvitse, kunhan osaat ratkaista 2. asteen yhtälön ja tarkastella juurien (ominaisarvojen) merkkejä, reaali/kompleksisuutta ym. Nimitykset voit katsoa Eirolan prujusta.

4. Ratkaise $y' = Ay$, missä $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ etsimällä ominaisarvo λ ja ominaisvektori x sekä λ:aan liittyvä yleistetty ominaisvektori u siten, että $Au = \lambda u + x$ (eli $A - \lambda I)u = x$). (Muistathan luennolta, että tähän johdutaan yritteellä $y_2 = te^{\lambda t}x + e^{\lambda t}u$.)

5. Määrää ja luokittele systeemin

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 6y + 11 \\ \dot{y} = 5x + 2y - 1 \end{cases}$$

   tasapainopisteet.

6. Määritä systeemin

$$\begin{cases} \dot{x} = x - x^2 + 2y + 3 \\ \dot{y} = -x + 2y \end{cases}$$

   tasapainopisteet (TP).

   Linearisoi systeemi kunkin TP:n suhteen ja määritä niiden luonne.

Loppuviikko

1. Laske e^{At} matriisille $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   Suorita tehtävä määritelmään nojautuen, jolloin voit käyttää MAPLE:a tai MATLAB:ia matriisipotenssien laskemiseen. Vasta tuloksen tarkistukseen `exponential` tai MATLAB:ssa `expm` (jälkimmäiselle ei voi antaa symbolista argumenttia t).

2. Ratkaise alkuarvotehtävä $y' = Ay$, $y(0) = (0, 1, -1)$, missä A on edellisen tehtävän matriisi. Käytä hyväksesi siinä laskettua exp-funktiota. Piirrä ratkaisukäyrät ajan funktiona sekä "faasiavaruuspiirroksena". Tässä helppiesimerkki jälkimmäistä ajatellen:

```
with(plots):
spacecurve([cos(t),sin(t),t],t=0..4*Pi);
```

3. Lineaarinen vakiokertoiminen systeemi voidaan ratkaista (numeerista e^{At}- laskentaa hyödyntäen) MATLAB:n `expm`-funktiolla. Seuraavan koodin voit leikata ja liimata www-sivulta (`http://www.math.hut.fi/teaching/y3/kirjallisuus.html`) otsikon **Ohjelmistoja** alta (ainakin tulee pian sinne). Sijoita se työskentelyhakemistoosi tiedostoksi `linsys.m`.

```
function [t,y] = linsys(A,x0,T,siz)
% Esim: A=[1 0 0;1 3 0;0 1 1];x0=[1;2;3];
%       [t,y]=linsys(A,x0,2);
%       plot(t,y)                        % aikariippuvuus
%       plot(y(:,1),y(:,2))              % faasitaso (1,2)
%       plot3(y(:,1),y(:,2),y(:,3))      % faasiavaruus (3-d)
if nargin < 4, siz = 100; end;
t = linspace(0,T,siz);
m=size(A);m=m(1);
y = zeros(m,siz);
for i=1:siz,
y(:,i) = expm(A * t(i)) * x0;    % Tässä on asian ydin
end;
y=y';
```

Ratkaise sen avulla edellinen tehtävä. Piirrä useita faasiavaruuskäyriä, voit piirtää myös $y_1 y_2 - -, y_1 y_3 - -, y_2 y_3 -$tasoille projektioita. (Kaiken tarvittavan avun saat komennolla `help linsys`, kuten yllä olevasta näet.) Huomaa vielä, että MATLAB:ssa samaan grafiikkaikkunaan voi piirtää lisää komentamalla `hold on`.

MAPLE-vaihtoehto: Voit määritellä funktion `linsys:=(A,t,x0)->exponential(A,t)&*x0:`

Saat ratkaisun symbolisessa muodossa. Laskeminen ja piirtäminen sensijaan eivät suju yhtä vauhdikkaasti kuin MATLAB:lla.

4. Ratkaise alkuviikon tehtävään 4 liittyvä AA-tehtävä: $y(0) = (0,1)$ käyttämällä ratkaisukaavaa $y = e^{At} y(0)$. Piirrä sekä aikariippuvuus- että faasitasokuvat ja selvitä laatu.

5. Suorita AV teht. 5:n ratkaisu MAPLE:lla (tai MATLAB:lla) ja piirrä faasikuva.

6. Samat sanat kuin edellä tehtävään AV 6 nähden.