Mat-1.373 Matematiikan peruskurssi Y 3, syksy 1996

5. harj. viikko 42 (14 – 18.10.)

- Greenberg:4.6 Application to Systems..., s 183 ->, Appendix A on sopivaa kertausainesta. (Aivan kaikkea tarvittavaa ei löydy GREE:stä, kuten faasitaso- ja stabiilisuus asioita.)
- Kreyszig 7^{th} ed. 4.2 – 4.4 ss. 158 – 179 Ch3 Syst. of DE, Phase Plane and stability: Luvuissa 1,2,3 kerrataan tavallisia DE-asioita, ne pidetään pääosin tunnettuina
- Eirola: DYS-monistetta, prujuissa ja www:ssä (linkki: Oppikirjoja ...)

Välikoealue julkistetaan ma 14.10 www:ssä ja uutisryhmässämme, siihen kuuluu n. 4.5 ensimmäistä harjoitusta.

Lisäohjeet ja korjaukset näihin tehtäviin ilmestyvät www:ssä (missäs muualla)

Alkuviikko

1. (Kertaustehtävä, sopivia lähteitä yllä mainittujen liäksi esim. Grossman II)

   Tarkastellaan vaimennettuun värähtelyyn liittyvää alkuarvotehtävää

   $$\begin{cases} x'' + 4x' + 13x = \cos t \\ x(0) = 0, x'(0) = 1 \end{cases}$$

   Ratkaise "perinteiseen"tapaan: 1) Homog. yht. karakt. yht. avulla, 2) Yrite y_p epähomogeeniyhtälön erityisratkaisun löytämiseksi.

2. Piirrä seuraavien diff.yhtälöiden suuntakentät sopivilla alueilla. Ratkaise yhtälöt analyyttisesti ja hahmottele joitakin ratkaisukäyriä samaan kuvaan. (Vrt. tietokoneharj.) a) $y' = 2y/t$ b) $y' = -x/y$, c) $9yy' + x = 0$

3. Kirjoita vapaan vaimennetun värähtelyliikkeen diff. yhtälö

   $my'' + cy' + ky = 0$

   1. kertaluvun systeemiksi merkitsemällä $y_1 = y, \quad y_2 = y'$. Ratkaise (AA)-tehtävä $y(0) = 0, y'(0) = 1$ matriisitekniikkaa käyttäen, kun $m = 1, c = 2, k = 0.75$.

   Piirrä ratkaisukäyrä ja sen derivaatta sekä "faasitasokuva", jonka

   pisteet ovat $(y_1(t), y_2(t))$ (t:n toimiessa käyräparametrina).

   Voit tarkistaa MAPLE:lla vaikkapa näin (elegantimpia tapojakin on):

```
y:=.. # saamasi ratkaisu
dyvp:=m*diff(y,t,t)+c*diff(y,t)+k*y;
dyvp:=subs(m=1,c=2,k=0.75,dyvp);
subs(t=0,y);subs(t=0,diff(y,t);
plot({y,diff(y,t)},t=0..5);  # aikariippuvuus
plot([y,diff(y,t),t=0..5]);  # faasitaso  (parametrimuodossa annettu käyrä)
```

Lopuksi voit kokeilla dsolvea:

```
y:='y'  #varmuustoimenpide
dy:=subs(y=y(t),dyvp)=0;
dsolve({dy,y(0)=0,D(y)(0)=1},y(x));
```

4. [1]

   Määritä yleinen ratkaisu, sekä kriittisen pisteen $(0,0)$ tyyppi ja stabiilisuus sekä piirrä suuntakenttä ja useita ratkaisukäyriä a) $\begin{cases} y_1' = 3y_1 - y_2 \\ y_2' = -y_1 + 3y_2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y_1' = -4y_2 \\ y_2' = y_1 - 5y_2 \end{cases}$

   ohje: Ratkaisussa olennainen on MAPLE-komento eigenvects. Voit myös kokeilla exponential-funktiota ja tarkistukseen "mustinta laatikkoa", komentoa `dsolve`. Suuntakenttä ja ratkaisukäyräapproksimaatiot saadaan DEplot:lla (with(DEtools):)

5. [2]

   Samat asiat kuin edellä, kun systeemit ovat: a) $\begin{cases} y_1' = -3y_1 + y_2 \\ y_2' = -4y_1 + 2y_2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y_1' = -2y_1 + 2y_2 \\ y_2' = -2y_1 - 2y_2 \end{cases}$

6. Kaksi säiliötä, A ja B sisältää $50l$ nestettä kumpikin. Niitä yhdistää kaksi putkea siten, että $A \to B$ virtaa nestettä nopeudella 4 l/min ja $B \to A$ 1 l/min ja oletetetaan, että neste sekoittuu heti. Puhdasta vettä virtaa säiliöön A nopeudella 3 l/min ja säiliöstä B poistuu nestettä niinikään nopeudella 3 l/min. Oletetetaan, että alkuhe tkellä säiliö A sisältää 25 kg suolaa ja säiliö B pelkkää vettä. Määritä suolamäärät kummassakin säiliössä ajan funktiona. Piirrä suolamäärät ajan funktiona sekä toiseen kuvaan "trajektori faasitasossa", eli käyrä $(x_1(t), x_2(t))$, missä siis aikaa t pidetään käyräparametrina.

   Millä ajanhetkellä suolamäärät säiliöissä ovat samat?

```
3 l/min

----------          ----------
-->       |         |         |
--        |_________|         |
 |         4 l/min ->         |
 |        -----------         |
 |        |         |         |
 |    A   |         |    B    |
 |        |---------|         |
 |         <-- 1 l/min        |
 |        |---------|         ----
 |________|         | ____________-> 3 l/min
```

[1] Alkuviikolla riittää pelkkä ratkaisu, loppuviikolla muut tarkastelut
[2] Samat sanat

Loppuviikko

Ohje: suorita `with(DEtools);` Tällöin saat käyttöön mm. funktion `DEplot`. Se on monipuolinen funktio suuntakenttien ja faasitasokuvien piirtoon. Kuvaan voidaan piirtää annettujen pisteiden kautta kulkevat integraalikäyrät, jotka on saatu numeerisella menetelmällä laskien. (Menetelmän valintaankin on optioita.)

1. Kokeile ensin piirtää yhtälön $y' = \sin t - y/2$ suuntakenttiä ja integraalikäyriä vaikka tähän tapaan:

   ```
   dyht:=diff(y(t),t)=sin(t)-y/2;
   DEplot(dyht,[y],t=0..12,{[0,0],[0,1],[0,-1]},y=-3..3,arrows=THIN); % V.4  (?)
   DEplot(dyht,[t,y],t=0..12,{[0,0],[0,1],[0,-1]},y=-3..3,arrows=THIN); % V.3 (?)
   ```

   Piirrä sitten joitakin alkuviikon 1)-tehtävän piirroksia

2. Tee alkuviikon tehtävien 4 ja 5 puuttuvat osat (kts. alaviitteet)

3. Määritä yleinen ratkaisu (virrat) seuraavassa LRC-piirissä, kun $E = 220 \sin t$.

   ```
          L=0.5 h       I2
        |-- UUUUU---|---->------|
        |           |           |
     I1 ^                       |
        |           |           |
                    <           <
        E           > R1=1      > R2=4
                    <           <
        |           |           |
        |---------------| |------
                       C=1 F
   ```

4. Tarkastellaan systeemiä $\begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2 \\ y_2' = -y_1 - y_2 \end{cases}$

   Ratkaise vaikkapa dsolve:lla, määrää kuitenkin myös ominaisarvot. Piirrä kuva, jossa on suuntakenttä sekä y-akselin pisteiden $y = -3..3$ kautta kulkevat ratkaisukäyrät (eli siis pisteiden $(0, -3), ...(0, 3)$)

   Ohje: Jälleen `with(DEtools):` Sopivia funktioita: `DEplot` tai `phaseportrait`.

5. Luennolla osoitettiin, että epähomogeenisen systeemin

   $$\dot{x} = Ax + f, \quad x(0) = \bar{x}_0$$

   ratkaisu on

   $$x(t) = e^{At}\bar{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-u)} f(u) du.$$

   Vektorifunktion integrointi tarkoittaa yksinkertaisesti integrointia komponenteittain.

Ratkaise tämän avulla systeemi

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ohje: Suositeltavaa on diagonalisoida ja soveltaa exp-funktiota diagonaalimatriisiin. Voit myös kokeilla MAPLE:n `linalg`-pakkauksen `exponential`-funktiota.

6. Tarkastellaan vaimentamatonta heiluria (vrt. Luennot ja Timo Eirolan pruju). Yhtälöhän on:

$$\begin{cases} \Theta'(t) = v(t)/L \\ v'(t) = -g\sin(\Theta(t)) \end{cases}$$

Piirrä edustava joukko faasitasokäyriä ja selvitä, mitä faasikuvion eri osat tarkoittavat fysikaalisesti.