Mat-1.373 Matematiikan peruskurssi Y 3, syksy 1996

4. harj. viikko 41 (7 – 11.10.)

```
GREE 3.8 ss. 125 - 136 (Vector Transformations)
GREE 4.1 - 4.4 ss. 137 - 175 (The Eigenvalue Problem)
tai
KRE  ss. 419 - 422 (Linear Transf.)
KRE  ss. 7.10 - 7.14  386-   414
```

Alkuviikko

1. Muodosta seuraavien lineaarikuvausten matriisit:

   a) $F : R^2 \to R^2$: projektio x_1-akselille

   b) $F : R^3 \to R^2$: projektio $x_1 - x_2$-tasolle

   c) $F : R^2 \to R^2$: heijastus x_2-akselin suhteen

   d) $F : R^3 \to R^4$: $F(x) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ 2\,x_2 - x_3 \\ 5\,x_3 - 2\,x_1 + x_2 \\ x_2 - 3\,x_1 \end{bmatrix}$

2. Laske "kiertomatriisin" $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

   Ominaisarvot ja -vektorit.

3. Matriisilla A on ominaisarvot $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 6$. Vastaavat ominaisvektorit ovat

   $$x_1 = (1,0,1)^T, x_2 = (1,1,0)^T, x_3 = (0,1,1)^T.$$

   Määritä A.

4. Olkoon A $n \times n$-matriisi. a) Osoita, että A:lla ja A^T:llä on samat ominaisarvot.

   b) Oletetaan, että A on kääntyvä. Olkoon x ominaisarvoon λ liittyvä ominaisvektori. Osoita, että $1/\lambda$ on A^{-1}:n ominaisarvo ja $y = Ax$ siihen liittyvä ominaisvektori (tai miksei myös x). Mistä tiedät, että $\lambda \neq 0$?

   c) Jos λ on A:n ominaisarvot, niin osoita, että λ^m on A^m:n ominaisarvo.

5. Osoita, että kolmiomatriisin A (ylä- tai ala-) ominaisarvot ovat A:n diagonaalialkiot.

6. Määrää seuraavien matriisien ominaisarvot ja -vektorit. Laske yksi käsin (tai ainakin simuloiden käsinlaskua) Muissa voit käyttää MATLAB:n `eig`-komentoa tai MAPLE:n `eigenvects`:iä.

   Mitä tyyppiä ovat matriisit ja mitä sillä perusteella voidaan jo päältäpäin sanoa?

   a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} \frac{i}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{i}{2} \end{bmatrix}$ c) $C = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{i\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{i\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$

Loppuviikko

Muista MATLAB-ohjeet *kirjallisuutta*-linkin MATLAB-kohdassa
(`http://www.math.hut.fi/teaching/y3/kirjallisuus.html`).

MATLAB-koodeja: Kotisivun kohdassa **Ohjelmakoodeja**

1. Olkoon $A = \begin{bmatrix} k & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}$, missä k ja m ovat reaalilukuja $k \neq m$. Määritä A:n ominaisarvot ja ominaisvektorit. Onko A defektiivinen?

   Ohje: Ominaisarvot saat vaivattomasti vain katsomalla. Laske ominaisvektorit käsinlaskutekniikkaa simuloiden MAPLE:n `charmat`, tms. komentoa hyödyntäen ja tarkista `eigenvects`:lla

2. MATLAB-tehtävä

   Spektri tarkoittaa ominaisarvojen joukkoa kompleksitasossa (n pistettä, joista osa saattaa yhtyä, spektraalisäde on $r = max(|\lambda_j|)$ ja spektraaliympyrä siis r-säteinen ympyrä.) Spektri kertoo yleensä paljon matriisin luonteesta.

   Polun varrella ja kotisivulla kohdassa **ohjelmakoodeja** on funktio (listaus lopussa):
   ```
   function z=spektri(A)
   % Piirretaan matriisin A spektraaliympyra ja ominaisarvot tasoon
   ```
   Piirrä *symmetristen*, *vinosymmetristen* ja *ortogonaalisten* matriisien spektrejä. **Vihje:** Jos A on mielivaltainen matriisi, niin sen avulla voit muodostaa symmetrisen matriisin esim: $A^T A$ tai $A + A^T$, vinosymmetrisen $A^T - A$ ja ortogonaalisen ainakin permutoimalla yksikkömatriisin rivejä/sarakkeita. Yleisempiä ortogonaalimatriiseja voi suorittaa funktiolla `orth`, jolla voi tehdä *Gram-Schmidt*-ortogonalisoinnin annetuille (LRT) sarakevektoreille. (Siis `orth(rand(n,n))` soveltuu "satunnaiskokeisiimme", `rand(n,n)` muodostaa "todennäköisyydellä 1"lineaarisesti riippumattoman joukon. Kokeile luokkaa 50×50 olevia matriiseja. Mitä havaitset? Kokeile myös pelkän satunnaislukumatriisin spektriä,

3. Luennolla osoitettiin, että ominaisarvot säilyvät similariteettimuunnoksessa. Verifioi tämä kokeellisesti MATLAB:lla, kun

   $$A = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   Miten on ominaisvektorien laita? Voit jatkaa kokeellista verifiointia tyyliin:
   ```
   >> T=rand(3,3),eig(...);
   ```
   Ohje: MATLAB:n eig toimii niin, että pelkkä `eig` antaa ominaisarvot ja `[D,V]=eig(A)` matriisit D (ominaisarvodiagonaalimatriisi) ja V (ominaisvektorisarakematriisi).

4. Seuraava MATLAB-istunto määrittelee matriisin A ja tarkistaa, että sarakesummat ovat $= 1$.

```
>> A=[.5 .25 .25;.25 .5 .25;.25 .25 .5]

A =

    0.5000    0.2500    0.2500
    0.2500    0.5000    0.2500
    0.2500    0.2500    0.5000

>> sum(A)

ans =

     1     1     1
```

Kyseessä on ns. stokastinen matriisi, joka esittää *Markov-prosessin* siirtymätodennäköisyyksiä.

Lähde liikkeelle jostain R^3:n vektorista u_0 ja iteroi tyyliin `u0=A*u0` (käytä $\boxed{\uparrow}$:tä). Mitä havaitset eri alkupisteistä lähtiessäsi. Selitä ilmiö lausumalla alkupistevektori ominaisvektorien muodostaman kannan avulla ja kertomalla tämä esitys matriisin A potensseilla.

Voit myös suoritta matriisin potenssiinkorotusta (`A^ p`) ja lausua julki havaintosi. Havaitsemasi sarakevektorien stabiloituminen johtuu aivan samasta syystä.

5. Diagonalisoi alla olevat matriisit, jos mahdollista. Kielteisessä tapauksessa perustele diagonalisoitumattomuus.

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

6. Laske A^{100} sille (niille) edellisen tehtävän matriis(e)ille, jo(t)ka diagonalisoitu(u/vat). (Raakaan voimaan perustuva MATLAB-ratkaisu kelpaa vain tarkistukseen.)

Matlab-koodeja

```
function y=spektri(A)
d = eig(A);
r = max(abs(d));
th = linspace(0,2*pi);
axlow=-r-r/10;axhigh=r+r/10;
plot(r * cos(th), r * sin(th));
hold on;
axis([axlow axhigh axlow axhigh]);
axis('square');
plot(real(d),imag(d),'*');
hold off;
```