Mat-1.373 Matematiikan peruskurssi Y 3, syksy 1996

3. harj. viikko 40 (30.9 – 4.10.)

Alkuviikko

1. a) Määritä kaksi R^3:n vektoria, jotka virittävät tason $x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0$. (Valinnanvaraa on.)

   b) Olkoon P_2 korkeintaan astetta 2 olevien polynomien muodostama vektoriavaruus. Selvitä, ovatko tähän avaruuteen kuuluvat polynomit $x - 2x^2$, $x^2 - 4x$ ja $-7x + 8x^2$ lineaarisesti riippuvat vai riippumattomat.

2. Määritä matriisin $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ rangi sekä sarakeavaruuden ja riviavaruuden kannat. (Sarakeavaruus= sarakevektorien viritelmä.)

   Ohje: Riviavaruuden kannan saat esim. suorittamalla Gaussin rivioperaatiot ja ottamalla ei-0-rivit (miksi?) Sarakeavaruuden kannan saat esim. valitsemalla Gauss- tai Gauss-Jordan (RREF)-muodon "johtavia sarakkeita" vastaavat sarakkeet alkuperäisestä matriisista (miksi?). Muitakin tapoja ja päättelymahdollisuuksia on ja erityisesti tilanteesta riippuen (sanotaan nyt vaikka jos sattuisi olemaan $r(A) = m$ (tai n).

   Jos haluat ortonormaalit kannat, mikään ei estä soveltamasta *Gram– Schmidt:iä.*

3. a) Osoita, että jos A on neliömatriisi, niin sen rivit ovat lineaarisesti riippumattomat, jos ja vain jos sen sarakkeet ovat lineaarisesti riippumattomat.

   b) Osoita, että jos A ei ole neliömatriisi, niin joko rivit tai sarakkeet ovat lineaarisesti riippuvat.

4. Osoita, että yläkolmiomatriisin (yhtä hyvin alakolmiomatriisin) determinantti = diagonaalialkioiden tulo.

5. Selvitä vektorien $(1,2,3,4), (5,6,7,8), (9,10,11,12), (13,14,15,16)$ lineaarinen riippuvuus/mattomuus laskemalla sopivan matriisin determinantti. Determinantin laskemisessa on suositeltavaa käyttää Gaussin eliminaatiomenettelystä tuttuja rivioperaatioita. (Voit kolmiomuodon sijasta yrittää myös rohkeasti saada 0-riviä aikaan, jos aavistelet siihen suuntaan.)

6. Neliömatriisia A sanotaan *nilpotentiksi*, jos $A^p = 0$ jollain p. Osoita, että jos $A^p = 0$, niin $I - A$ on kääntyvä ja $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + ... + A^{p-1}$.

   Vihje: Tarvitset vain käänteismatriisin määritelmää.

Loppuviikko

Osa tehtävistä tehdään MATLAB:lla. Siihen on ohjeita kotisivun *kirjallisuutta*-linkin MATLAB-kohdassa, (`http://www.math.hut.fi/teaching/y3/kirjallisuus.html`).

```
Käynnistys:  use matlab      tai
             matlab   (Unix)      ikoni (Windows)
             help
             help rref, help rank
```

1. [K] Tarkastellaan lineaarista 4×6 systeemiä $Ax = c$,

missä $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ ja $c = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

Suorita komento `[R,jb]=rref(A)`. Poimi sen avulla 4×4 osamatriisi, joka on yksikkömatriisi. Poimi myös alkuperäisestä matriisista sarakkeet, jotka muodostavat maksimaalisen lineaarisesti riippumattoman joukon (sarakeavaruuden kannan).

Tee liitännäismatriisi `Ac=[A c]` (tämä MATLAB-liittäminen edellyttää, että c on sarakevektori) ja tarkista `rank`-komennolla, että MATLAB:n käsitys rangista on sama kuin sinun, niin A:n kuin Ac:n suhteen.

Totea, että rangin avulla lausuttu ratkaisujen lukumäärälause toimii tässä(kin) tapauksessa. (Kun esität ratkaisua taululla, niin muotoile tämä lause. (GREE: Thm 4, s. 98))

Ohje: MATLAB:ssa matriisin osien poimiminen on helppoa: Jos matriisista A halutaan poimia vaikkapa sarakkeet no. 2,3,5 ja sijoittaa ne muuttujaan B, niin `B=A(:,[2 3 5])` (MAPLE:ssa myös helppoa: `B:=submatrix(A,1..4,[2,3,5]);`)

2. [K] Olkoon $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 & -1 & 0 \\ 5 & -2 & -12 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ -4 & -1 & 4 & -10 & -6 \end{bmatrix}$

Määritä maksimaalinen joukko lineaarisesti riippumattomia rivejä. Saat käyttää kaikkia mahdollisia komentoja (yhtä hyvin MATLABkuin MAPLE). Huomaa, että `rowspace` ei välttämättä etsi kantavektoreita annettujen virittäjävektoreiden joukosta, joten se ei välttämättä sovellu.

3. Olkoon $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

Muodosta matriisi $A - \lambda I$ ja sen determinantti, eli karakteristinen polynomi. Laske tämän nollakohdat. Sijoita 0-kohdat vuorollaan karakteristiseen matriisiin ja laske linsolve tai rref-komennoilla vastaavat ominaisvektorit.

Tarkista lopuksi eigenvals ja eigenvects-komennoilla ja vertaa myös MATLAB:n `eig`-funktion antamiin.

Vihje:

```
A:=matrix(3,3,[-2,2,-3,2,1,-6,-1,-2,0]);
Id:=diag(1,1,1);
```

```
Cmat:=A-lambda*Id;     #vrt. charmat  (Huom, merkki)
Cpoly:= ...            #vrt. charpoly  (Huom, merkki)
lam:=roots(...);
Cmat1:=subs(lambda=...,Cmat);Cmat2:= ...
gaussjord # tai rref tai linsolve  --> Om. vektorit
eigenvects    #tarkistus
```

4. [K] Lineaarikuvauksella $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ on ominaisuudet $F((1,1)) = (9,-3)$ ja $F((2,-1)) = (3,6)$. Laske kuvauksen matriisi (luonnollisten kantojen suhteen) ja määritä tämän avulla vektorin $(1,-1)$ kuva. (Tässä ei juuri konetta tarvittane.)

5. Matlab-tehtävä, aiheena lineaarikuvausten havainnollistus “Strangin taloa” kuvaamalla. www-kotisivulla on viite MATLAB-teksteihin kohdassa harj3 Siellä on mm. seuraava (nopeampi tapa voi olla näppäily)

```
T=[0 0 -1 6 13 12 12 3 3 6 6 0;0 9 8 15 8 9 0 0 5 5 0 0]
plot(T(1,:),T(2,:))
```

Tässä siis piirretään kuvio, jonka x-koordinaatit ovat matriisin 1. rivillä ja y-koordinaatit 2. rivillä (siis sarakkeet muodostavat (x,y)-koordinaattiparit).

Olkoon A 2×2-matriisi ja F_A sen määräämä lineaarikuvaus, Siten (pysty)vektorin $\mathbf{x}$ kuva $\mathbf{y}$ saadaan kertolaskulla $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$. Piste**joukko** voidaan kuvata kokoamalla R^2:n pisteet sarakkeiksi matriisiin (kuten `T` yllä) ja kertomalla se kuvausmatriisilla A. Niinpä talon nurkkapisteiden kuvat saadaan suoraan kertomalla "talomatriisi"T A:lla, ts. $S = AT$.

Olkoon A “kiertomatriisi” $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

Suorita `th=pi/4;A=[...;...]; S=T;` ja $\boxed{\uparrow}$-iteroi sitten riviä:

```
>> S=A*S;plot(S(1,:),S(2,:))
```

Yritä ennustaa, miten talo kuvautuu seuraavissa kuvauksissa ja kokeile sitten. (Kunhan nyt katsot muutaman). Matriisit on annettu tilan säästämiseksi MATLAB-syntaksin mukaisina.

```
[1 0; 0 -1]; [-1 0; 0 1]; [0 1; -1 0];[0 1; 1 0];[.5 0; 0 .5]; [2 0; 0 2]
[1 0; 1/3 2/3];[1 1/4; 1/4 1]
```

6. [K] Määrää seuraavien matriisien ominaisarvot ja -vektorit. Määritä kunkin ominaisarvon algebrallinen ja geometrinen kertaluku.

(Algebrallinen kertaluku=juuren kertaluku, geom kl=ominaisavaruuden dim)

Mitkä matriisit ovat defektiivisiä (g-kl $<$ a-kl)? Muodosta Ei-defektiivisissä tapauksissa ominaisvektoreista koko avaruuden kanta. Missä tapauksessa saat ortonormaalin kannan?

Laske `charpoly`-tyylillä ja tarkista halutessasi `eigenvects`:lla. (Voit kokeilla myös MATLAB:n `eig`:ia.)

a) $A = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 6 \\ -3 & -1 & -3 \\ -6 & -6 & -4 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ c) $C = \begin{bmatrix} 109 & 87 & 81 \\ 87 & 73 & 63 \\ 81 & 63 & 61 \end{bmatrix}$