## Mat-1.373 Matematiikan peruskurssi Y 3, syksy 1996

### 2. harj. viikko 39 (23 – 27.9.)

### Alkuviikko

```
GREE: ss 3 - 61 tai
KRE: 7.4, 7.5, 7.6,7.7 ss. 344 -- 368 , 7.15 ss. 414 -- 418
(KRE-kohdissa on ylimääräistäkin, toisaalta KRE-kirjasta näyttää
puuttuvan Gram-Schmidt.)
```

1. a) Ratkaise systeemi

$$\begin{cases} 2x+y+z=10 \\ 3x+y-z=6 \\ x-2y-4z=-10 \end{cases}$$

Gaussin eliminaatiomenettelyllä [1] Opettele mieluusti käsittelemään tehtäviä pelkästään kerroinmatriisien avulla.

b) Kirjoita systeemi vektoriyhtälönä, jossa vasen puoli on sarakevektorien lineaarikombinaatio ("sarakeajattelu"). Tulkitse a)-kohdassa laskemasi tulos näin ajateltuna (sanallisesti tai kuvallisesti).

2. Määritä seuraavien lineaaristen systeemien ratkaisujoukot Gaussin algoritmilla.

b) $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3+x_4=-1 \\ 2x_1+x_2+x_3-x_4=4 \\ x_1+2x_2-x_3-2x_4=5 \\ x_1+x_3=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3-3x_4=0 \\ x_1-x_2+4x_3=2 \end{cases}$

Vast: c)

$$\begin{cases} x_4=\alpha_1 \\ x_3=\alpha_2 \\ x_2=-4+3\alpha_1+9\alpha_2 \\ x_1=-2+3\alpha_1+5\alpha_2 \end{cases}$$

Vihje: Tarkoitus on laskea nämä käsin tai ainakin simuloida käsinlaskutekniikkaa. MAPLE:lla se voisi sujua tähän tapaan:

```
with(linalg);
A:=matrix([[1,-1,2,1],[2,1,1,-1],[1,2,-1,-2],[1,0,1,0]]);
b:=vector([-1,4,5,1]);
Ab:=augment(A,b);
A1:=addrow(Ab,1,2,-2); #  rivi2 --> -2*rivi1+rivi2
A2:=addrow(A1,1,3,-1); #  rivi3 --> -1*rivi1+rivi3
...
(kts. ?addrow)
```

[1] Gauss tarkoittaa: Saata systeemi yläkölmiomuotoon ja suorita sitten takaisinsijoitus. (Gauss–Jordan puolestaan tarkoittaa rivioperaatioden jatkamista myös "alhaalta ylös".)

Tarkistuksen voi suorittaa komennolla `backsub` ja edellä vaiheittain suoritetun Gaussin eliminaatiopuuhan yhdellä rysäyksellä komennolla `gausselim`. (Vrt. loppuviikko) Huom: Nämä rivioperaatiot voi myös tehdä hyvin helposti MATLAB:lla, tosin rationaaliaritmetiikka ei siinä toimi kunnolla. MATLAB:ssa ei ole `gausselim`-komentoa vastaavaa, sensijaan sekä MATLAB:ssa että MAPLE:ssa on `rref`, jotka suorittavat koko *Gauss–Jordanin* algoritmin. (Tässä kohden MATLAB:ssa on jokin ohjelmointivirhe. joka tietyissä esimerkeissä antaa vääriä tuloksia.)

3. Voiko $4 \times 6$-systeemillä olla 1-käs, 1-,2-,3-,4-.5-.6- parametrinen ratkaisujoukko?

   Anna jokaiseen myönteiseen vastaukseen liittyvä esimerkki. Ohje: Kirjoita systeemi valmiiksi porrasmuotoon, riittää katsella systeemin muotoa, numeeristen arvojen säveltäminen ei ole tarpeen.

4. a) Virittävätkö vektorit $(0,0,0,1),(0,0,1,1),(0,1,1,1),(1,1,1,1)$ avaruuden $R^4$?

   b) Osoita, että vektorit $\mathbf{v}_1 = (1,1,0), \mathbf{v}_2 = (0,1,1)$ja $\mathbf{v}_3 = (1,0,1)$ muodostavat avaruuden $R^3$ kannan. Mitkä ovat vektorin $\mathbf{x} = (1,2,3)$ koordinaatit tässä kannassa?

   Muista: Virittäminen tarkoittaa: $\forall \mathbf{v} \in R^4 \ \ \exists x_1, ..., x_4$ siten, että $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + ... + x_4\mathbf{v}_4$.

   Kirjoita vektorit sarakevektoreiksi ja muuta "sarakeajattelu riviajatteluksi" (siis päinvastoin kuin teht. 1b)).

   Avaruuden (tässä $\mathbf{R^3}$) **kanta** tarkoittaa vektorijoukkoa, joka a) on lin. riippumaton ja b) virittää koko avaruuden. Koska $\dim(\mathbf{R^3}) = 3$, niin 3:n vektorin joukko on kanta, jos jompi kumpi ominaisuuksista a), b) on voimassa (tee tämä itsellesi selväksi tyyliin, jos olisi 3:n vektorin joukko, joka virittää, mutta ei ole lin rton, niin ...).

5. Osoita, että vektorit $e_1 = (2,1,3), e_2 = (1,-2,0), e_3 = (6,3,-5)$ muodostavat ortogonaalisen kannan $R^3$:ssa.

   Määritä vektorin $u = (9,-2,4)$ esitys tässä kannassa.

6. Sovella Gram-Scmidt-menettelyä vektorijoukon $(1,1,0),(2,-1,1),(1,0,3)$ ortonormalisointiin:

   **Vast:** $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (3/\sqrt{22}, -3/\sqrt{22}, 2/\sqrt{22}), (-1/\sqrt{11}, 1/\sqrt{11}, 3/\sqrt{11})$

## Loppuviikko

Merkinnällä **K** varustetut tehtävät ovat "kotitehtäviä", jotka oletetaan lasketuiksi etukäteen. Ne esitetään aluksi tavalliseen. laskuharjoitustyyliin. Listaan saa merkitä myös ei-K-tehtäviä, sen voi tehdä myös K-tehtävien läpikäynnin jälkeen.

## MAPLE-ohjeita

Vektoreita ja matriiseja varten on `linalg`-pakkaus. Kannattaa näissä puuhissa aina aloittaa komennolla `with(linalg);` (Jos et halua monta kertaa nähdä koko funktiolistausta, niin käytä loppumerkkinä kaksoispistettä (:) ).

Matriisikertolasku on `A &* B`. Matriisilaskutoimituksissa tarvitaan `evalm`-komentoa, esim:

```
A:=matrix([[3,-1,1],[-15,6,-5],[5,-2,2]]);
B:=matrix([[2,0,1],[3,1/2,4],[1,-1,-5]]);
```

```
evalm(5*A-3*B);
evalm(A &* B);
```

Viimeksimainittu tarvitaan, jotta tulosmatriisi evaluoituisi. Matriisimuuttujan sisältö ei näy pelkästään nimen (ja puolipisteen) kirjoituksella (kuten tavallisen muuttujan), vaan tarvitaan esim `print(A)` tai `op(A)`. (op – "operand")

Tässä vaiheessa erityisen hyödyllisiä `linalg`-funktioita: `addrow, augment, backsub, col, evalm, gausselim, GramSchmidt, innerprod, inverse, linsolve, matrix,op,print,row,rref,stack,submatrix, vector`

1. Tee alkuviikon tehtävät 1) ja 2) soveltamalla MAPLE-funktoita `gausselim, bacsub`. Muodosta myös `rref` ja kokeile `linsolve`-ratkaisua. Opettele lukemaan ratkaisut niin `gausselim` kuin `rref`-tuloksesta.

   Kokeile `rref`-komentoa myös MATLAB:lla.

   Ohje: MATLAB:ssa matriisit muodostetaan tyyliin:

   ```
   A=[2 1 1;3 1 -1:...];b=[10;6;-10];Ab=[A b];
   help rref
   ```

2. Tarkastele satunnaisluvuista koostuvaa $m \times n$-systeemiä $Ax = b$. Mitä arvelet ratkaisujen olemassaolosta ja lukumäärästä (kuinka monta vapaata parametriä), jos a) $m = n = 20$, b) $m = 20, n = 25$, c) $m = 30, n = 20$

   Vahvista arveluasi kokeilemalla seuraavaan tyyliin:

   ```
   with(linalg)  # ladataan linalg-pakkaus
   A:=randmatrix(20,26);
   ?gausselim, ?backsub
   evalf(``)  lyhentää tulostusta.
   ```

3. [K]

   *Kirchhofin virtalaki*: Virtapiirin jokaisessa pisteessä pätee: tulevien virtojen summa = lähtevien virtojen summa.

   *Kirchhofin jännitelaki*: Virtapiirin jokaisessa suljetussa silmukassa ulkoisen jännitelähteen jännite (elektomotorinen voimia) = jännitehäviöiden summa.

   *Ohmin laki*: $U = RI$.

   Muodosta yllä mainittujen pariaatteiden nojalla lineaarinen yhtälösyteemi alla olevalle virtapiirille ja ratkaise virrat.

```
           8 V
         <-----
    I1    |
----<---- | |---------
|         |          |
<                    <
> 1 Ohmi             > 1 Ohmi
<                    <
>                    >
|      0.5 Ohmia     |
------\/\/\/--->-----
|              I3    |
<                    |
>                    |
< 2 Ohmia            \/ I2
>                    |
|         |          |
----<---- | |---------
          |
        16 V
      <------
```

4. [K]

Liikenneverkko: Kadut ovat yhdensuuntaisia kuvassa näkyvien nuolien osoittamalla tavalla. Kuvaan on merkitty risteyksiin tulevat ja niistä lähtevät liikennemäärät tunnissa. Koska risteykseen saapuvien ajoneuvojen täytyy myös poistua siitä, saadaan yhtälöryhmä tuntemattomien liikennemäärien $x_1, x_2, x_3, x_4$ määräämiseksi, jotka kuvaavat liikennemääriä katuverkon sisäosassa. Laske nämä.

```
      \/                                ^
       |400                             |800
600    |                                |
 >-------------------->------------------------> 800
       |              x1                |
       |                                |
   x4 \/                                ^ x2
       |              x3                |
 <-------------------<-------------------------< 1200
1000   |                                |
       |                                |
      \/                                ^
      600                              1000
```

Osoita, että tehtävällä on ääretön määrä ratkaisuja. Mikä rajoitus tulee asettaa vapaasti valittavalle parametrille, jotta ajosuuntaa osoittavia liikennemerkkejä ei tarvitsisi muutella.

5. [K]

   Muodosta matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 371 & -76 & -40 \\ 36 & -7 & -4 \\ -176 & 36 & 19 \end{bmatrix}$$

   käänteismatriisi *Gauss–Jordan*-menettelyllä. Voit laskea käsin tai koneella (MAPLE, MATLAB) . Koneella laskiessasi saat käyttää "korkeintaan" `rref` tai `gaussjord` (synonyymi) tasoisia funktioita. (Vasta tarkistukseen `inverse` (tai MATLAB:ssa `inv`).

6. Tutustu MAPLE-komentoon `GramSchmidt` ja sovella sitä alkuviikon tehtävään 6.