Mat-1.373 Matematiikan peruskurssi Y 3, syksy 1996

12. harj. viikko 49 (2 – 5.12)

```
GREE Diffuusio(lämpö)yhtälö:14.2, 14.4, 14.5,
     Laplace/Poisson 15.1,15.2,15.5
     Kompleksianal. Luvut 18 ja 20
KRE:
```

Osa loppuviikon tehtävistä on tavallisia (tietokoneluokassa on taulu). Otetaan tällä kertaa yksi tehtävä "liikaa".

Alkuviikko

1. a) Laske GREE-kirjan esimerkkiä s. 622 differenssimenetelmällä "aika-indeksiin"$k = 4$ saakka. Tässä siis $g(t) = h(t) = 0, f(t) = 100, l = 1, \alpha = 1, \Delta x = 1/4, \Delta t = 1/80$ ja kirjassa on aikaindeksit $k = 1, 2$. (ja kyseessähän on lämmönjohtuminen).

   b) Vertaa "tarkkoihin", sarjaratkaisusta saataviin.

   Huom! Tarkistukseen ja kuviin (sekä tarvittaessa mainittuihin kirjassa laskettuihin aikariveihin) voit käyttää MATLAB-funktiota `yforwdif` (www:matlab-koodeja).

2. Määritä likiarvot sähköstaattiselle potentiaalille pisteissä P_{11}, P_{12}, P_{13} alueessa, jota rajoittavat johtavat metallilevyt:

```
        u=100
    4 |-------|
      |   |   |
      |--1,3--|
      |   |   |
    2 |--1,2--| u=0
u=0   |   |   |
      |--1,1--|
      |   |   |
    0 |-------|
      0   1   2
        u=0
```

3. Tarkastellaan Laplacen yhtälön diskretointia neliössä, joka diskretoidaan jakamalla molemmissa suunnissa 3:een osaan.

   a) Jos hilan sisäpisteissä laskettavat approksimaatiot järjestetään: $u_{11}, u_{21} u_{12}, u_{22}$, niin osoita, että yhtälösysteemin matriisi on (MAPLE-syntaksilla lausuttuna)

```
A:=matrix(4,4,[-4,1,1,0,1,-4,0,1,1,0,-4,1,0,1,1,-4]);
```

(Tähän ei pitäisi tarvittaman MAPLE:a)

b) Määritä potentiaali 3×3-hilan sisäpisteissä $P_{11}, P_{21}P_{12}, P_{22}$, missä hilapisteet kummallakin akselilla ovat $0, 1, 2, 3$ ja reuna-arvot ovat yläreunalla $u = \sin \frac{\pi x}{3}$ ja muilla $= 0$.

4. Luonnehdi geometrisesti seuraavat joukot C:ssä:

   a) $|z + i| > 1$, **b)** $1 < |z - 1| < 3$ **c)** $Re(\frac{i}{z}) = 2$ **d)** $|z - 1| + |z - i| \leq 2$, **e)** $Re(z^2) = 1$.

5. a) Osoita, että exp-funktio kuvaa suorakaiteen $a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq \pi/2$ origokeskiseksi ympyrärenkaan neljännekseksi, jonka sisäsäde $= e^a$ ja ulkosäde $= e^b$ eli napakoordinaatistossa ilmaistuna $e^a \leq r \leq e^b, 0 \leq \theta \leq \pi/2$.

   b) Määritä kulma-alueen $0 \leq arg z \leq \pi/8$ kuvajoukko kuvauksessa $w = f(z) = i/z^2$.

6.
   - a. Laske $\log z$:n ja $\sqrt{z}$:n päähaara-arvot, kun a1) $z = -3i$, a2) $z = -1 - i$.
     Huom! Greenbergin lukijat voivat käyttää G-päähaaraa $(0 \leq arg < 2\pi)$ kun taas Kreyszigistit voivat ottaa K-päähaaran $(-\pi \leq arg z < \pi)$. $\sqrt{z}$ (tai yleensä $\sqrt[n]{z}$) :n päähaara on se, joka saadaan, kun $arg z$ valitaan päähaaralta ja otetaan $k = 0$ juurikaavassa.
   - b. Määrää sellainen z^{1+i}:n haara, jonka määrittelyjoukkoon kuuluu luku -1. ja laske $(-1)^{1+i}$ tällä haaralla.

Loppuviikko

1. Tarkastellaan metallisauvaa, $l = 1, \alpha = 1$. Sauvan päät pidetään $0°C$:ssa ja lämpötila alkuhetkellä on $f(x) = \sin \pi x$. Sovella Crank–Nicholsonia, $\Delta x = 0.2, r = 1$ ts.

```
0.20     |-------|-------|-------|-------|-------|-------|   k=5
         |       |       |       |       |       |
0.16     |-------|-------|-------|-------|-------|-------|   k=4
         |       |       |       |       |       |
0.12     |-------|-------|-------|-------|-------|-------|   k=3
         |       |       |       |       |       |
0.08     |-------|-------|-------|-------|-------|-------|   k=2
         |       |       |       |       |       |
0.04     |-------|-------|-------|-------|-------|-------|   k=1
         |       |       |       |       |       |
 0       |-------|-------|-------|-------|-------|-------|   k=0
         0      0.2     0.4     0.6     0.8     1.0
        j=0     j=1     j=2     j=3     j=4     j=5
```

Määritä lämpötilat välillä $0 \leq t \leq 0.2$. Vertaa tarkkaan ratkaisuun.

Suorita myös differenssimenetelmä samoilla parametreilla (erit. siis $r = 1$) ja lisäksi arvolla $r = 0.25$.

Suorita vertailuja.

Ohje: Tämän voi suorittaa käsin MAPLE:n avustuksella. Voi olla, että www-sivlle ilmestyy myös apuneuvoja. Tarkistukseen ja tarkempaan laskentaan voi käyttää MATLAB-funktiota `yforwdif` (kts. MATLAB-koodeja, www

2. Jos Laplacen yhtälö diskretoidaan neliössä ja hilavälien lkm = n, niin sisäsolmujen lkm = $n-1$, merk. $p = n - 1$. Seuraava MAPLEfunktio muodostaa yhtälösysteemin matriisin, kun tuntemattomat numeroidaan, kuten AV teht. 3. Tutki, mitä siinä tapahtuu ja ota käyttöön omaan MAPLE-istuntoosi. Saat sen www-sivulta `maple-koodeja`.

```
lapmatr:=proc(p)
local B,C,v;
B:=band([1,-4,1],p);
C:=diag(seq(B,i=1..p));
v:=vector(2*p+1,0);
v[1]:=1;v[2*p+1]:=1;
evalm(C+band(v,p^2))
end:
```

Ratkaise AV teht. 3 tämän avulla (muodosta oikea puoli – olkoon se nimeltään vektori b – manuaalisesti tai kts. AV teht. 3). Kokeile myös seuraavaa koodia (myös www:ssä) :

```
alareuna:=100:ylareuna:=0:vasen:=100;oikea:=100:
b:=vector(p^2,0): # alustetaan p^2-pituinen 0-vektori
for j:=from 1 to p do
   b[j]:=b[j]-alareuna:
   b[(j-1)*p+1]:=b[(j-1)*p+1]-vasen:
   b[j*p]:=b[j*p]-oikea:
   b[j+p*(p-1)]:=b[j+p*(p-1)]-ylareuna:
od:
b:=evalm(b);
```

Ratkaisun voit koota matriisiksi näin:

```
U:=matrix(2,2,evalf(linsolve(..,..));
U:=swaprow(U,1,2);  # saadaan samoin p\"ain kuin kuvassa (y kasvaa yl\"osp\"ain)
```

3. Ratkaise edellinen tehtävä käyttäen yllä esitellyistä osista kokoonpantua funktiota `LaplaceEq` (*Kreyszig–Norminton*), saat sen www-sivulta `maple-koodeja`. Tihennä hilaa n:n arvoihin 4,8,16 (esim.). Matriisin U voit piirtää yksinkertaisesti `plot3d(U[i,j],i=1..p,j=1..p)`.

4. Ratkaise Poissonin yhtälö $\nabla^2 u = y$ yksikköneliössä, kun reunaehtoina on $u(x,0) = x^3$, $u(x,1) = x^3$, $u(0,y) = 0$, $u(1,y) = 1$ Käytä 9×9 hilaa ja kokeile hienommallakin. Käytä ratkaisuun funktiota `poisson` (*Kreyszig–Norminton*), saat sen maple-koodeja- www-sivulta. Toinen vaihtoehto on käyttää MATLAB:ia ja Mathewsin ydirich-funktiota (www-matlab-koodeja-sivu). Piirrä kuva.

5. Määritä kunkin ao. funktion f derivaatta $f'(z)$ pisteissä, joissa se $\exists$ ja selvitä, missä ko. f on analyyttinen ja missä ei.

   a) $(1-2z^3)^5$ b) $x + i \sin y$ c) $\frac{1}{z^2+3iz-2}$

6. Laske seuraavat käyräintegraalit: a) $\int_C |z|^2 dz$, missä C on jana pisteestä $z = 0$ pisteesen $z = 1 + i$.

   b) $\int_C (z + 1/z)dz$, missä C on yksikköympyrä (vastapäivään).

   c) $\int_C 1/(z-i)dz$, missä C on ympyrä $|z-i| = 2$ (myötäpäivään).

7. Laske a:n eri arvoilla ($|a| \neq 1$) integraali

$$\oint_C \frac{ze^{z^2}}{z-a} dz$$

pitkin positiivisesti suunnistettua yksikköympyrää $|z| = 1$.

Vast: Jotain, kun $|a| > 1$, jotain muuta, kun $|a| < 1$.

Toisessa tapauksessa pärjäät Cauchyn integraalilauseella, toisessa tarvitset C:n i-kaavaa.