Mat-1.373 Matematiikan peruskurssi Y 3, syksy 1996

11. harj. viikko 48 (25 – 29.11)

```
Fourier-approksimointi: GREE ja KRE CH 10
Interpolointi
Osittaisdiffyhtälöt  GREE CH 13, KRE CH 11
```

Alkuviikko

1. Muodosta toisen ja kolmannen asteen PNS-polynomiapproksimaatiot avaruudessa $S = C[-1,1]$ funktioille a) $f(x) = |x|$, b)$f(x) = \sin x$ c) $f(x) = e^x$.

   Ohje: Sovella Gram–Schmidt'n ortonormalisointia monomeihin $1, x, x^2, (x^3)$ ja sitten vain projektio, eli "Fourier-summa".

   MAPLEon hyvänä apuna tässä "käsinlaskussa". Piirrä mielellään kuvaajat.

2. Eräässä koesarjassa tutkittiin puolijohdeliitoksen kapasitanssin riippuvuutta jännitteestä ja saatiin seuraava taulukko:

jännite	25 V	12.5 V	5 V	2.5 V
kapasitanssi	1 nF	2 nF	5 nF	10 nF

   Laske Lagrangen interpolaatiomenetelmää (kaavat paperin lopussa) käyttäen näiden arvojen perusteella likiarvo jännitettä 18.5 V vastaavalle kapasitanssille.

   Piirrä interpolaatiopolynomin kuvaaja ja esitä sen perusteella arvelusi siitä, onko polynomi-interpolaatio sopiva menetelmä mallintamaan tätä riippuvuutta.

   Ohje: Jos haluat tehostaa käsinlaskua MAPLE:lla, voit ottaa `maple-koodeja`-sivulta funktion `lag`. (MAPLE:ssa on myös valmis funktio `interp`.)

   MATLAB-vaihtoehto:

   ```
   xdata=[25,12.5,5,2.5];ydata=[1,2,5,10];kertoimet=polyfit(xdata,ydata,3)
   % tiedettävä, että interpolaatiopolynomin asteluku= datapisteiden
   lkm - 1.
   % (4-1 = 3)
   x=linspace(min(xdata),max(xdata));y=polyval(kertoimet,x);
   plot(x,y,xdata,ydata,'o')
   ```

3. Olkoot $l_0, l_1, ..., l_n$ (erillisiin) pisteisiin $x_0, x_1, ..., x_n$ liittyvät *Lagrangen kertojapolynomit.* Osoita, että

   $$\sum_{i=0}^{n} l_i(x) = 1 \quad \forall x.$$

   Vihje: Mieti, kuinka monessa pisteessä tietyn asteinen polynomi voi saada arvon 1.

```
function y=lagrange(xdata,xev,j)
% Lagrangen kertojafunktio ("Cardinal function")  HA maalisk. -95
% y=lagrange(xdata,xeval,j);
% Lasketaan xdata:aan liittyvä j:s l-funktio pisteissä xeval
% esim: y=lagrange([1 2 3 4],[1 2 3 4],0) antaa 1 0 0 0
%
j=j+1; % Matlab-vektorissa indeksi alkaa 1:stä
y=1; tuloind=1:length(xdata);ind=tuloind~=j;tuloind=tuloind(ind);
for i=tuloind;y=y.*(xev-xdata(i))./(xdata(j)-xdata(i));end;
```

4. a) Osoita, että $u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ toteuttaa (3-D) Laplacen yhtälön $\nabla^2 u = 0$. (Tällaisia funktioita kutsutaan harmonisiksi.)

   b) Osoita, että $u(x,y) = a\ln(x^2+y^2)+b$ toteuttaa (2-D) Laplacen yhtälön ja määritä vakiot a ja b siten että reunaehdot $u=0$ ympyrällä $x^2+y^2=1$ ja $u=5$ ympyrällä $x^2+y^2=9$ toteutuvat.

5. Ratkaise lämpöyhtälön $u_t = c^2 u_{xx}$ avulla $80cm$ pituisen kuparisauvan lämpötilafunktio $u(x,t)$. Sauvan alkulämpötila on $f(x) = 100\sin \pi x/80°C$ ja sauvan päät pidetään "jäissä"(eli $0°C$). Kuinka kauan kestää, kunnes maksimilämpötila on pudonnut $50°C$:een? Tässä $c = 1.158$.

   Ratkaise tehtävä samanlaisella "muuttujanerotteluyritteellä"kuin kirjassa/luennolla. Huomaa, että alkuehdon muodosta johtuen ei tarvita Fourier-sarjakehitelmää (jos sitä aivan välttämättä haluaa käyttää, niin siitä jää kuitenkin vain yksi termi).

6. Luennolla johdettiin lämpöyhtälön $\alpha^2 u_{xx} = u_t$ ratkaisu reunaehdoilla 0 ja alkuehdolla $u(x,0) = f(x) = 100°C$. ($l = 10$ cm, $\alpha^2 = 1.14cm^2/$s) .

   Johda ratkaisu, jos $f(x) = 100\cos(\pi x/l)$.

Loppuviikko

1. Tasavälisen polynomi-interpolaation vaaroja voi demonstroida Rungen funktiolla

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2} \quad x \in [-1,1].$$

   Valitse n pistettä tasavälisesti määrittelyväliltä ja muodosta niiden kautta kulkeva interpolaatiopolynomi. Kokeile eri n:n arvoja, esim. $n = 5, 10, 15$. Muodosta myös joitakin PNS-polynomiapproksimaatioita (esim. asteita 3,4,5) ja piirrä samaan kuvaan. Tässä siis PNS-polynomi tarkoittaa parasta approksimaatiota neliöintegraalinormin suhteen (Gram - Schmidt, ...) (Huom: Eri asia on sellainen PNS-polynomi, joka minimoi polynomin ja funktion erotuksen neliösumman laskettuna annetuissa diskreeteissä datapisteissä. Tällaisen laskee MATLAB:n polyfit, jos annetaan parametri n kutsussa polyfit(xdaya,ydata,n) pienemmäksi kuin length(xdata)-1). (Sitäkin saa verrata, etenkin jos tekee MATLAB:lla.)

   Myös MATLAB:n `spline`-funktio on tässä yhteydessä kokeilemisen arvoinen (joskaan ei "pakollinen").

2. Piirrä alkuv. teht. 5 lämpötilafunktio 3D-kuvana. Piirrä myös sauvan lämpötilaprofiili ajanhetkillä $t = 0, t = 0.1, t = 0.5, t = 2, t = 5$ (vaikka tähän tapaan: `plot(subs(t=0,u),subs(t=0.1,u),subs(t=0.5,u),subs(t=2,u),,x=0..0.80)`)

3. Suorita alkuviikon teht. 6 MAPLE:lla. Tee vastaavat piirrokset kuin edellisessä tehtävässä. Käytä sopivaa äärellistä osasummaa (esim. $n = 5$, voit kokeilla).

4. Lämpötilajakautuma $u(x,t)$ 2 m pituisessa sauvassa määräytyy tehtävästä

   $\alpha^2 u_{xx} = u_t \quad (0 < x < 2, t > 0)$

   $u(0,t) = u(2,t) = 0 \quad (t > 0),\ u(x,0) = \begin{cases} 50x, & x \in (0,1) \\ 100 - 50x, & x \in (1,2) \end{cases}$

   Olkoon $\alpha^2 = 2.9 \times 10^{-5} m^2/s$.

   a) Määritä ratkaisu $u(x,t)$

   b) Laske lämpötila sauvan keskipisteessä tunnin kuluttua alkuhetkestä.

   c) Miten kauan kestää, kunnes lämpötila keskipisteessä on pudonnut lukemaan $10°C$?

   d) Tee vastaavat piirrokset kuin edellä.

5. [5,6]

   Eristetyt päät, "adiabaattiset reunaehdot

   Sauvan päät(kin) ovat tällä kertaa eristeyt. Määritä lämpötilafunktio $u(x,t)$, kun alkuehtona on $u(x,0) = f(x)$ ja reunaehdot ovat nyt

   $$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(L,t) = 0.$$

   Suorita muuttujanerotteluprosessi ja osoita, että se johtaa tulokseen

   $$u(x,t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} e^{-(\alpha n\pi/L)^2 t}$$

   missä a_n:t ovat Fourier-kosinisarjan kertoimet.

   Huomaa: $u \to a_0$, kun $t \to \infty$. Vastaako tämä fysikaalista intuitiota?

   Tee taas vastaavat piirrokset kuin edellä.

Lagrangen interpolaatio

Annettu erilliset x-pisteet: $x_0, x_1, .., x_n$. Muodostetaan Lagrangen kertojapolynomit

$$l_j(x) = \prod_{i \neq j} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}.$$

$l_j(x_i) = \delta_{i,j}$. Interpolaatiotehtävän $p(x_i) = y_i, \quad degp \leq n$ (1-käs) ratkaisu: $p(x) = y_1 l_1(x) + ... + y_n l_n(x)$.

Fourier-kaavoja

Yleinen tapaus, f määritelty välillä $(-L, L)$

$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$
$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$

Puolen jakson laajennukset, f **määritelty välillä** $(0, L)$

Sinisarja

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \qquad (HS_1, HS_2)$$

Kosinisarja

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \qquad (HC_1 - HC_3)$$

Nejännesjakson laajennukset, f **määritelty välillä** $(0, L)$

$$f(x) = \sum_{n=1,3,..}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{2L}, \quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{2L} dx \qquad (QS_1, QS_2)$$

$$f(x) = \sum_{n=1,3,..}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{2L}, \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{2L} dx \qquad (QC_1, QC_2)$$

Integraalikaavoja

$$\int x \sin(px)dx = \frac{\sin(px) - px\cos(px)}{p^2}$$

$$\int x \cos(px)dx = \frac{\cos(px) + px\sin(px)}{p^2}$$

Trigonometrian kaavoja

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$\sin ix = i\sinh x, \quad \cos ix = \cosh x$

0.1 Maple-ohjeita

Otteita näistä: `http://www.math.hut.fi/teaching/y3/maple/ohjeita.html`