Mat-1.373 Matematiikan peruskurssi Y 3, syksy 1996

10. harj. viikko 47 (18 – 22.11)

```
GREE: CH10 (Fourier-sarjat)
KRE:  CH10 (Fourier-sarjat)

Maple:http://www.math.hut.fi/teaching/y3/opemate/fourier1.html
Kts. myös lopussa olevia Maple-ohjeita sekä kotisivun Maple-ohjeita
```

Alkuviikko

1. Muodosta funktion $f(x) = |x|, \quad \in [-\pi, \pi]$ Fourier-sarja. Piirrä kuvaaja muutaman jakson alueella ja Fourier-osasummia. Esittääkö sarja tätä funktiota kaikilla x?

   Vast: $FS(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$

2. Muodosta funktion $f(x) = x^2/4, \quad x \in (-\pi, \pi)$ Fourier-sarja ja johda sen avulla sarjaesitykset:

   a) $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

   b) $\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}$

   Perustele esitysten oikeus yleisen suppenemislauseen avulla.

3. Olkoon annettu funktiot $f(x) = 1 - \cos x$ ja $g(x) = 1 + \sin x$ välillä $[0, \pi/2]$. Laajenna funktiot a) parillisiksi ja b) parittomiksi välille $[-\pi/2, \pi/2]$ ja piirrä kuvaajat.

   Esitä tämän perusteella yleinen sääntö sille, millä ehdolla (tyhjä ehtokin on mahdollinen) välillä $[0, b]$ määritelty jatkuva funktio voidaan jatkaa jatkuvaksi a) parilliseksi b) parittomaksi funktioksi välille $[-b, b]$, eli millä ehdolla parillinen/pariton laajennus on jatkuva.

4. Sauvan lämpötila noudattaa kaavaa $T(x) = 100(l-x)/l$, missä l on sauvan pituus ja x etäisyys toisesta (origoon sijoitetusta) päätepisteestä. Muodosta T-funktion puolen jakson kosini- ja sini-sarjat ("half-range expansions").

5. GREE s. 476 teht. 27: half and quarter range ext. Puolen ja neljännesjakson laajennukset. Muodosta funktion $f(x) = 100, \quad x \in [0, l]$ puolen jakson sekä myös neljännesjakson sini- ja kosinisarjat. Piirrä kyseisten jaksollisten laajennusten kuvaajat muutaman jakson alueelta.

Loppuviikko

1. (Ei varsinaisesti mikään tietokoneteht., mutta voi toki käyttää hyödyksi.) Olkoon f 2π-jaksoinen, $f(x) = x$ välillä $[-\pi, \pi]$.

   Kehitä f Fourier-sarjaksi, tavoitteena tulos: $x = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx, \quad x \in (-\pi, \pi)$.

   Osoita sarjan termeittäistä integrointia koskevan lauseen Gree s. 479 Thm. 2 avulla, että mainittu operaatio on luvallinen ja johda integroimalla sarjaesitys funktiolle x^2 välillä $[-\pi, \pi]$.

2. Ratkaise AA-tehtävä $y'' + 2y = r, \quad y(0) = y'(0) = 0$,missä $r(t)$ on 2π- jaksoisen neliöaallon: $r(t) = \begin{cases} -1, kun - \pi < t < 0 \\ 1, kun 0 < t < \pi \end{cases}$. Fourier-osasumma S_7 (eli mukana ovat termit $\sin 7t$-termiin saakka.)

3. Tee alkuviikon teht. 5 vastaava (quarter range homma) funktiolle $f(x) = x, \quad x \in [0, l]$. Piirrä kaikki neljä kuvaajaa, sarjoista tarvitsee muodostaa vain puolen jakson sini ja neljännesjakson kosini.

4. [Vastaa kahta tehtävää] Tarkastellaan vaimennettua värähtelyä kuvaavaa yhtälöä

   $my'' + cy' + ky = r(t)$.

   Olkoon $m = 1, c = 0.02, k = 25$ ja $r(t) = \begin{cases} t + \pi/2, & -\pi < t < 0, \\ -t + \pi/2, & 0 < t < -\pi \end{cases}, \quad r(t + 2\pi) = r(t)$.

   Määritä "pitkän aikavälin" ("steady state") ratkaisu $y(t)$. (Tästä on homogeeniosan (ja siten alkuehtojen) vaikutus vaimentunut pois.)

   Periaate: Kehitetään $r(t)$ Fourier-sarjaksi. Etsitään kutakin sarjan termiä vastaten erityisratkaisua y_n muodossa $y_n = A_n \cos nt + B_n \sin nt$. Lineaarisuuden perusteella (jos sarjan termeittäin derivoiminen on sallittua) päätellään, että $\sum y_n$ on koko yhtälön ratkaisu.

   Laske ainakin 5 termiä ratkaisusarjasta ja piirrä niiden summa sekä termit erikseen. Jokin niistä on dominoiva, identifioi se. Piirrä samaan kuvaan heräte $r(t)$ ja "steady state"ratkaisu välillä $[0, 4\pi]$.

5. Tutki Gibbsin ilmiötä alkuviikon tehtävän 4 funktiolla. Piirrä esim. luokkaa s_{50} ja s_{100} olevia osasummia samaan kuvaan funktion kanssa. Piirrä myös funktion ja tällaisen osasumman erotus (eri kuvaan).

Fourier-kaavoja

Yleinen tapaus, f määritelty välillä $(-L, L)$

$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$

$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$

Puolen jakson laajennukset, f määritelty välillä $(0, L)$

Sinisarja

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \qquad (HS_1, HS_2)$$

Kosinisarja

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \qquad (HC_1 - HC_3)$$

Nejännesjakson laajennukset, f määritelty välillä $(0, L)$

$$f(x) = \sum_{n=1,3,..}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{2L}, \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{2L} dx \qquad (QS_1, QS_2)$$

$$f(x) = \sum_{n=1,3,..}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{2L}, \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{2L} dx \qquad (QC_1, QC_2)$$

Integraalikaavoja

$$\int x\sin(px)dx = \frac{\sin(px) - px\cos(px)}{p^2}$$

$$\int x\cos(px)dx = \frac{\cos(px) + px\sin(px)}{p^2}$$

Trigonometrian kaavoja

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$\sin ix = i\sinh x, \quad \cos ix = \cosh x$

0.1 Maple-ohjeita

Otteita näistä: `http://www.math.hut.fi/teaching/y3/maple/ohjeita.html`
`http://www.math.hut.fi/teaching/y3/opemate/fourier1.html`

```
 a0:=(1/(2*l))*int(f(x),x=-l..l);
 an:=(1/l)*int(f(x)*cos(n*Pi*x/l),x=-l..l);
 bn:=(1/l)*int(f(x)*sin(n*Pi*x/l),x=-l..l);

## Nyt voidaan laskea mitä esimerkkejä halutaan. Vaikkapa harj.9 AV teht. 6:

 f:=x->x;
 assume(n,integer):
 a0;an;
 bn; # V.4 osaa käyttää integer-tietoa, V.3 ei osaa - no tehdään sitten itse:
 bn:=subs({sin(n*Pi)=0,cos(n*Pi)=(-1)^n,l=Pi},bn);
 s:=seq(sum(bn*sin(n*x),n=1..N),N=1..5);
 plot({x,s},x=-Pi..Pi);
## Jos halutaan laskea jokin erillinen osasumma vaikka suurella n:llä
## Gibbsin ilmiön havainnollistamiseksi tai muuten, niin luonnollisesti:
 s50:=sum(bn*sin(n*x),n=1..50):plot({x,s50},x=-Pi..Pi);
 plot(x-s50,x=-Pi+.1..Pi-.1); #Erotus,mutta ei ihan "hyppypisteeseen" saakka
```