Mat-1.373 Matematiikan peruskurssi Y 3, syksy 1996

1. harj. viikko 38 (16 – 20.9.)

Alkuviikko

Viitteitä Saleniuksen monisteeseen:

```
Geom. sarja, teleskooppisarja s. 1-2         Majorantti/minorantti s. 5
Suhdetesti, juuritesti s. 7-8                Integraalitesti s. 9
Leibnizin lause (vuorottelevat sarjat) s. 11  Taylorin kaava s. 29
Suppenemissäde s. 22-23 (lue myös Abelin lause)
```

1. Olkoon $P_n(x)$ astetta n oleva Taylorin polynomi funktiolle f, kehitettynä pisteessä x_0. Määritä $P_n(x)$ sekä ylärajafunktio virheelle annetulla välillä $[a,b]$, ts. funktio g siten, että $|R_n(x)| \leq g(x), \quad x \in [a,b]$, kun

   $f(x) = \sin x, \quad x_0 = \pi/4, n = 6, x \in [0, \pi/2]$

2. Määritä seuraavien sarjojen summat:

   a) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(2n-3)(2n-1)}$, b) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (3/4)^n$

3. Selvitä seuraavien sarjojen suppenemiskäytös (itseinen/ehdollinen tai kukaties peräti hajaantuva)

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!n!}{(2n)!}$ b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(\ln n)^2}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$

   Vihje: Sopivia testejä/lauseita: *suhdetesti (tai juuritesti), integraalitesti, majorantti/minorantti ja Leibniz*

4. a) Osoita vertailuperiaatteen avulla vertaamalla harmoniseen sarjaan (siis käyttämättä integraalitestiä), että aliharmoninen sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad 0 < p < 1$ hajaantuu.

   b) Osoita (kahdella) esimerkillä, että positiivitermisen sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n \geq 0$ juuritestin perusteella ei voi tehdä johtopäätöstä, jos $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

5. Määritä potenssisarjan $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{n3^n}$, suppenemissäde ja -väli. Millä x:n arvoilla sarja suppenee 1) itseisesti , 2) ehdollisesti, 3) hajaantuu?

6. Laske e^{-2} Maclaurinin sarjakehitelmän avulla siten, että $|virhe| < 10^{-5}$. Käytä Leibnizin lauseen virhearviota.

Loppuviikko

Ennen aloittamista kannattaa katsoa tehtäväpaperin loppuosassa olevia Maple-ohjeita.

1. Taylorin polynomeja voidaan muodostaa komennolla `sarja:= taylor(f(x),x0,n)`, Maple:n palauttamasta jäännöstermistä päästään eroon komennolla: `convert(sarja,polynom);`

   Muodosta exp-funktion Maclaurinin [1] polynomeja ja piirrä funktio ja useita polynomeja samaan kuvaan.

[1] Maclaurin= Taylor kehitettynä origossa

Sopivia MAPLE-komentoja: `taylor,convert(...,polynom),plot`. Tee aluksi joitakin tyyliin: `t0:=taylor(exp(x),x=0,1); t1:=taylor(exp(x),x=0,2); ..., plot(exp(x),t1,t2,...,x=a..b)`.(Tässä pitää a:lla ja b:llä olla sopivat arvot.)

Kokeile sitten:

```
x:='x';N:=5;jono:=seq(taylor(exp(x),x=0,n+1),n=0..N);
```

(Huom: Jäännöstermien poispudottamiseksi täytyy yo. riville vielä tunkea `convert(...,polynom)`. Tee se, sitten voitkin piirtää tyyliin:

```
plot({exp(x),jono},x=-6..2,y=-2..8);
```

2.
   - Tee alkuviikon tehtävä 1 MAPLE:n avulla. Piirrä ylärajafunktio $g(x)$ ja todellinen virhe $f(x) - P_n(x)$ samaan kuvaan.
   - Tee lisäksi vastaava tehtävä, kun $f(x) = \ln \cos x, x_0 = 0, n = 6, x \in [0, \pi/6]$ Tässä ei ole teknisesti muuta eroa kuin 7. derivaatan itseisarvon maksimin arviointi. Sen saat parhaiten piirtämällä.

     Muista: `diff(f,x$n)` muodostaa n. derivaatan,

3. Muodosta sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ osasummia $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$, kun $n = 1...10$;

   Vihje:

   ```
   sum(1/k^3,k=1..1);
   sum(1/k^3,k=1..2);
   ...
   ```

   Huomaat pian, että `evalf` on tarpeen. Kun väsyt tähän, voit kokeilla:

   ```
    for n to 10 do evalf(sum(1/k^3,k=1..n)) od;
   ```

   Muodosta osasummat $s_{10}, s_{20}, s_{40}, s_{80}$ sekä niiden erotukset ja arvioi niiden perusteella (olettaen, että sama trendi jatkuu) sarjan suppenemiskäyttäytymistä.

   Määritä lopuksi sarjan summa MAPLE:n `sum`-komennolla.

   Vihje: Tee aluksi aivan yksinkertaisesti tyyliin `s10:=..., s20:=...,`.... Lopuksi voit kokeilla vaikka seuraavanlaista:

   ```
   s:=Sum(1/k^3,k=1..n);
   ?seq
   jono:=evalf(seq(subs(n=kk,s),kk=[10,20,40,80]));
   ```

   Huom: Jos jollain muuttujalla (sanokaamme `k`) on jokin arvo, voimme vapauttaa sen arvostaan sijoittamalla: `k:='k'` (Holmes s. 2).

4. Jos aikaa jää, voit tehdä MAPLE-yleisharjoitustehtäviä, jotka liitetään tähän perään.

1 Maple-harjoituksia

Y3, syksy 1996 Tässä on kokoelma MAPLE-harjoitustehtäviä, jotka on tarkoitettu omatoimiseen MAPLE-harjoitteluun. Tehtävät on pitkälle neuvottuja. Niitä ei varsinaisesti käsitellä harjoituksissa, mutta edellytetään osattaviksi. Jos niissä ilmenee ongelmia, niin harjoituksissa voi kysellä ja tarpeen mukaan ratkaisuja sijoitetaan "webbiin" saataville.

Missä voin käyttää MAPLE:a

MAPLE-ohjelmasta on juuri hankittu campus-lisenssi. Sen asennuksissa voi olla pieniä alkuviiveitä. Joka tapauksessa se on asennettuna harjoitusluokassamme `U 352` ja Maarintalon windows-luokassa ja luentojen alkamisviikolla sen pitäisi olla HP- ja α (alpha)-työasemissa. Se saadaan kaikkiin windows- Macintosh-, linux- ym. ympäristöihin tarpeen mukaan. Lisäksi oppilaat voivat ostaa sen omiin koneisiinsa ATK-keskuksesta erikoishintaan, jota ei vielä ole vahvistettu, mutta lienee luokkaa 500 mk.

Tällä hetkellä uusin versio V.4 on Windows- ja Mac- puolella. Työasemissa on toistaiseksi V.3. Näkyvin ero on käyttöliittymissä. V.3 on jo sinänsä erittäin hyvä ja sitä käytän itse eniten, koska operoin miltei yksinomaan työasemien puolella, paitsi harjoituksissa.

Käynnistys Työasemissa:

```
use maple
xmaple   tai
maple   (jos tekstipääte)
```

Tekstitilassa operoiminenkin on aivan tyydyttävää, nuolinäppäinselaus toimii. Toki graafinen käyttöliittymä näyttää kaavat kauniimmin ja ennen kaikkea kuvat.

Alkuvaiheessa tarpeellisimpia MAPLE-komentoja

```
>?
>?library
>?index
plot,subs,eval,evalf,value,diff,int,solve (kaikista voit kysellä ?:llä)
>x:=arvo;    # sijoitus muuttujaan ( := ) loppumerkki on ; tai :
>a*x+b=c ;   # määrittelee yhtälön
```

Dokumenttejä

Verkosta löytyy URL:stä
`http://www.math.hut.fi/teaching/y3/opemate/`
Holmes: An Introductory Guide to Maple (15 s.). Näitä on monistettuna myös luokassa U352 ja tullee monistettavaksi prujuihin. Muuta MAPLE-kirjallisuutta on joitakin kappaleita lainattavissa ja mukana luokkaopetuksessa:

1) Maple V Learnig Guide, 2) Maple V Programming Guide, 3) Maple V Handbook.

Helppi on hyvä ja kattava, lisäksi harjoitustehtävissä annetaan neuvoja.

Waterloo-MAPLE:n oma kotisivu on `http://daisy.uwaterloo.ca/`.

Holmesiin verrattavissa oleva ensi johdatus on:
`http://www.math.hut.fi/teaching/numsym/intro`
sen lopussa on 9 pikkutehtävää, joita itsekukin voi halutessaan kokeilla.

Tehtäviä

1. Katso URL:stä: `http://www.math.hut.fi/teaching/y3/opemate/` kohtaa: `An Introductory Guide to Maple`, eli yllä mainittu *Holmes*.

   Lukaise se läpi ja tee sen sivulla 2 oleva "problem", jossa ratkaistaan ja pyöritellään peräti 2. asteen yhtälöä.

2. Tarkastellaan polynomia $p(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 1$. Määritä sen juuret sekä paikalliset ääriarvot (laatuineen). Piirrä.

   Aloita tähän tapaan:

```
p:=x^3-... ;  # sijoitus muuttujaan on :=, loppumerkki on ; tai :
              # kertomerkkiä ei saa jättää pois (vrt. Mathematica)
dp:=diff(p,x);
?solve
?plot
?subs
```

3. Laske seuraavat summat: a) $\sum_{k=1}^{1000} k$, b) $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$, c) $\sum_{k=1}^{n} k$, d) $\sum_{k=1}^{n} 1/k^2$.

   `?sum`

4. Tarkastellaan funktiota $h(x) = 1 - x + \sin x$. Harjoittele sen käsittelyä a) lausekkeena, b) funktiona. Määritä molemmilla tavoilla $h(-2)$ ja piirrä h-funktion ja sen derivaatan kuvaajat välillä $[-5, 5]$.

   Ohje:

```
lauseke                        funktio
hlaus:=1-x+sin(x);             h:=x->...;
```

   Lue Holmes: s. 13 kohta `:= vs ->` ja MAPLE:ssa ?-> (tässä riittää lukea vain " arrow notation")

   MAPLE-funktion ja lausekkeen ero kannattaa tehdä itselleen selväksi. Ne, jotka ovat harrastaneet MATHEMATICA:aa, voivat verrata tähän
   `hlaus=1-x+Sin[x]`
   `h[x_]:=1-x+Sin[x]`

5. Kokeile komentoja:

```
Int(cos(x),x); value(``);      # Tämä tyyli on suositeltava - eliminoi
Int(cos(x),x=a..b);value(``);  # kirjoitusvirheitä.
int(cos(x),x=a..b);            # Välillä kuitenkin käytämme tätä
                               # lyhyyden vuoksi.
```

Edelleen:

```
int(sin(cos(x)),x); # Tässä tulos, jos Maple ei osaa
int(sin(x)/x,x);    # Joskus integroinnin tuloksena on tunnettu erikoisfunktio.
```

6. Ratkaise alkuarvotehtävä:

$$y'' = 2x^2 \sin x^2 - \cos x^2, \quad y(\sqrt{\pi}) = 2\sqrt{\pi}, \quad y'(\sqrt{\pi}) = 2$$

Kyseessä on puhtaasti integroimalla saatava ratkaisu (oikealla puolella ei esiinny y:tä). Matemaattisesti homma hoituisi tähän tapaan:

$$y'(x) = 2 + \int_{\sqrt{\pi}}^{x} y''(t)dt$$

$$y(x) = 2\sqrt{\pi} + \int_{\sqrt{\pi}}^{x} y'(t)dt$$

Kerro tämä ajatus MAPLE:lle. Aloita tähän tapaan:

```
2+Int(2*t^2*sin(t^2)-cos(t^2),t=sqrt(Pi)..x); # Katsotaan, onko oikein kirjoitettu.
dy:=value(``);      # Tai dy:=2+int(...);
dy:=subs(x=t,dy);   # Korvataan dy:n lausekkeessa x symbolilla t .
```

Tästä jo osaat jatkaa loppuun. Tarkista tuloksesi MAPLE:lla. Alkuehdoissa tarvitset `subs`- ja `eval`-komentoa, jälkimmäistä siksi, että MAPLE ei aina evaluoi automaattisesti edes sellaista lauseketta kuin $\sin \pi$.

Ratk: (vasta myöhemmin)

7. Piirrä funktio

$$f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+x+1}$$

ja sen 2 ensimmäistä derivaattaa samaan kuvaan. Miten erotat, mikä on mikä?

Käytä `simplify`-komentoa lausekkeiden sieventämiseen. Jos et jaksa miettiä, mikä olisi asiallinen määrittelyjoukko, voit käyttää kylmästi muotoa: `plot({f,df,d2f},x=-infinity..infinity)`, jota voit sitten tarpeen mukaan rajoittaa.

"Mikä on mikä". 1) Matemaattinen ratkaisu on katsoa lausekkeita. 2) Hyödyllistä on myös (monimutkaisempia tilanteita ajatellen) osata erottaa vaikka värien avulla. Se käy ainakin näin:

```
?plot
?color
p1:=plot(f,x=-infinity..infinity,color=red): # Käytä ihmeessä kaksoispistettä
p2:=plot(df,x=-infinity..infinity,color=green): # (puolipiste johtaa
p3:=plot(d2f,x=-infinity..infinity,color=blue): # kärsimykseen )
with(plots):      # Ladataan lisävarustepakkaus piirtämiseen
display({p1,p2,p3}); # Näin voidaan yhdistellä eri kuvia.
```

8. Ilmapallon tilavuus kasvaa nopeudella $10cm^3/s$. Millä nopeudella säde kasvaa hetkellä, jolloin pallon pinta-ala on $200cm^2$?

   Periaate: $V(t) = \frac{4}{3}\pi r(t)^3$, $A(t) = 4\pi r^2$. Derivoidaan: $V'(t) =$ lauseke, jossa esiintyy $r(t)$ ja $r'(t)$ (implisiittinen derivointi). Tästä saadaan yksi yhtälö, josta voidaan ratkaista r' V':n (tunnettu) ja r:n avulla. r saadaan pinta-alaehdosta.

   Voit aloittaa vaikka näin:

```
V:=(4/3)*Pi*r(t)^3; A:=4*Pi*r(t)^2;
yht1:=10=diff(V,t);yht2:=200=A; # diff soveltaa implisiittistä derivointia
                                # tuntemattomaan funktioon r(t)
```

   Ratkaisu: (vasta myöhemmin)