Teknillinen korkeakoulu Kivelä, Hakula / Nurmiainen

Mat-1.312 MATEMATIIKAN PERUSKURSSI T2 / kevät 1997

VÄLIKOE 3 / 6.5.1997

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, välikokeen numero, päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (AUT, TFY, TIK, TUO, SÄH, KON, KEM, MAK, PUU, MAA, RYK);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus.

Tehtävä 1: Etsi epälineaarisen yhtälöryhmän

$$\begin{cases} x^6 + y^5 - 1.997xy = 1, \\ x + y\sin(y) - xy = 0, \end{cases}$$

ratkaisu neljän desimaalin tarkkuudella Newtonin menetelmällä, kun alkuarvaus on $(x_0, y_0) = (-0.7, 0.6)$.

Anna geometrinen tulkinta ja piirrä kuvaajat alueessa $A = [-2, 0] \times [-2, 2]$.

Tehtävä 2: Pisteen (x_0, y_0) lyhin etäisyys suorasta $ax + by + c = 0$ on

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Johda tulos sopivan sidotun ääriarvotehtävän avulla.

Tehtävä 3: Laske sen xy-tason yläpuolella sijaitsevan kappaleen keskiö, jota rajoittavat kartio $z^2 = x^2 + y^2$ ja paraboloidi $z = 2 - x^2 - y^2$.

Tehtävä 4: Olkoon B pinnanpala, jonka parametriesitys on paloittain kahdesti jatkuvasti derivoituva ja joka on siinä mielessä suunnistuva, että reunan δB suunta ja pinnan normaalin $\mathbf{n}$ suunta voidaan valita toisiinsa nähden positiivisesti suunnistetuiksi. Olkoon $\mathbf{F}$ jatkuvasti derivoituva vektorikenttä, joka on määritelty pinnalla B reuna δB mukaanluettuna. Osoita, että

$$\oint_{\delta B} d\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \int_B (d\mathbf{S} \times \nabla) \times \mathbf{F}.$$

Mat-1.312 MATEMATIIKAN PERUSKURSSI T2 / kevät 1997

MELLANFÖRHÖR 3 / 6.5.1997

Skriv tydligt på varje provpapper på skilda rader:
1) studieperiodens namn, mellanförhörets nummer, datum;
2) studentnummer+bokstav, TEXTAT släktnamnet understreckat, alla förnamn;
3) utbildningsprogram (AUT, TFY, TIK, TUO, SÄH, KON, KEM, MAK, PUU, MAA, RYK);
4) eventuella tidigare namn och utbildningsprogram;
5) namnteckning.

Uppgift 1: Bestäm en lösning till det icke-linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^6 + y^5 - 1.997xy = 1, \\ x + y\sin(y) - xy = 0, \end{cases}$$

med hjälp av Newtons metod med fyra decimalers noggrannhet, om startgissningen är $(x_0, y_0) = (-0.7, 0.6)$.

Ge en geometrisk tolkning och skissa graferna i området $A = [-2, 0] \times [-2, 2]$.

Uppgift 2: Kortaste avståndet från punkten (x_0, y_0) till linjen $ax + by + c = 0$ är

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Härled detta resultat med hjälp av ett lämpligt extremvärdesproblem med bivillkor.

Uppgift 3: Bestäm tyngdpunkten (masscentrum) hos kroppen, som begränsas av konen $z^2 = x^2 + y^2$ och paraboloiden $z = 2 - x^2 - y^2$ och som är ovanför xy-planet.

Uppgift 4: Låt B vara ett orienterat ytstycke med randkurvan δB. B har en styckvis två gånger kontinuerligt deriverbar parametrisering och randen δB och normalen $\mathbf{n}$ är positivt orienterade relativt varandra. Låt $\mathbf{F}$ vara ett vektorfält som är kontinuerligt deriverbart i ett område som innehåller både B och δB. Visa, att

$$\oint_{\delta B} d\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \int_B (d\mathbf{S} \times \nabla) \times \mathbf{F}.$$