Mat-1.312 MATEMATIIKAN PERUSKURSSI T2 / kevät 1997

VÄLIKOE 2 / 25.3.1997

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, välikokeen numero, päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (AUT, TFY, TIK, TUO, SÄH, KON, KEM, MAK, PUU, MAA, RYK);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus.

Tehtävä 1: Sirkuksen "Elävä ammus" laukaistaan areenan reunalla olevasta tykistä $45°$ kulmassa alkunopeudella V. Lennon aikana sankariin vaikuttaa maan vetovoiman mg lisäksi nopeuden itseisarvon neliöön verrannollinen (verrannollisuuskerroin h) vastusvoima. Tehtävänä on määrittää turvallisen areenan halkaisija tarkasti, kun ilmanvastusta ei ole ($h = 0$), ja arvioida, kuinka lähelle näin laskettua reunaa "ammus" putoaa, kun ilmanvastus otetaan huomioon ($h = 0.0025$). Olkoot vakiot $m = 1$, $g = 10$, $V = 30$.

Tehtävä 2: a) Funktio $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ olkoon jatkuva pisteessä (x_0, y_0, z_0). Määritellään funktio $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ säännöllä: $g(x,y) = f(x,y,z_0)$. Todista, että g on jatkuva pisteessä (x_0, y_0).
b) Olkoon $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ differentioituva pisteessä $x \in \mathbb{R}^m$ ja tässä pisteessä $|\nabla f| \neq 0$. Todista, että on olemassa täsmälleen yksi yksikkövektori $v \in \mathbb{R}^m$ siten, että ko. pisteessä $\mathrm{D}_v f = |\nabla f|$.

Tehtävä 3: a) Osoita, että jos $u = \sin x + f(\sin y - \sin x)$, niin lauseke $u_y \cos x + u_x \cos y$ on riippumaton siitä, mikä differentioituva funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on kyseessä.
b) Kuinka muuntuu lauseke $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}$ napakoordinaatistoon siirryttäessä?

Tehtävä 4: Millä vakion a arvoilla funktiolla

$$f(x,y) = e^{x^2} - 2\cos y + axy$$

on suhteellinen minimikohta origossa?

Teknillinen korkeakoulu Kivelä, Hakula / Nurmiainen

Mat-1.312 MATEMATIIKAN PERUSKURSSI T2 / kevät 1997

MELLANFÖRHÖR 2 / 25.3.1997

Skriv tydligt på varje provpapper på skilda rader:
1) studieperiodens namn, mellanförhörets nummer, datum;
2) studentnummer+bokstav, TEXTAT släktnamnet understreckat, alla förnamn;
3) utbildningsprogram (AUT, TFY, TIK, TUO, SÄH, KON, KEM, MAK, PUU, MAA, RYK);
4) eventuella tidigare namn och utbildningsprogram;
5) namnteckning.

Uppgift 1:

Frågor: Cirkusens "Levande kanonkula" avskjuts från en kanon på arenans rand i 45° vinkel med begynnelsefarten V. Under flygturen verkar förutom jordens dragningskraft mg även en motståndskraft, som är proportionell mot kvadraten på fartens absolutbelopp (proportionalitetskonstant h) på hjälten. Uppgiften är att bestämma exakt diametern hos en säker arena, då luftmotståndet saknas ($h = 0$) samt att approximera hur nära den så beräknade randen "projektilen" landar, om man tar hänsyn till luftmotståndet ($h = 0.0025$). Sätt konstanterna $m = 1$, $g = 10$, $V = 30$.

Uppgift 2: a) Låt funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ vara kontinuerlig i punkten (x_0, y_0, z_0). Vi definierar funktionen $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ med hjälp av regeln $g(x, y) = f(x, y, z_0)$. Visa, att g är kontinuerlig i punkten (x_0, y_0).
b) Låt $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ vara differentierbar i punkten $x \in \mathbb{R}^m$ och låt $|\nabla f| \neq 0$ i den punkten. Visa, att det finns exakt en enhetsvektor $v \in \mathbb{R}^m$ sådan att $\mathrm{D}_v f = |\nabla f|$ i punkten i fråga.

Uppgift 3: a) Visa, att om $u = \sin x + f(\sin y - \sin x)$, så är uttrycket $u_y \cos x + u_x \cos y$ oberoende av vilken differentierbar funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är.
b) Hurudant blir uttrycket $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}$, då man går över till polära koordinater?

Uppgift 4: Vid vilka värden på konstanten a har funktionen

$$f(x, y) = e^{x^2} - 2\cos y + axy$$

ett lokalt minimum i origo?