Teknillinen korkeakoulu Kivelä / Laitinen

Mat-1.312 MATEMATIIKAN PERUSKURSSI T2

TENTTI 1.9.1997

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (AUT, TFY, TIK, TUO, SÄH, KON, KEM, MAK, PUU, MAA, RYK);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus.

Tentti kestää neljä tuntia.

Tehtävä 1: Määritä differentiaaliyhtälön $y'' - 2y' + y = e^x$ yleinen ratkaisu ratkaisemalla ensin homogeeniyhtälö ja etsimällä tämän jälkeen vakioiden varioinnilla epähomogeenisen yhtälön yksityisratkaisu. (Vakioiden variointi = variation of parameters, ts. muotoa $y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ olevan yritteen käyttö. Älä käytä valmiita kaavoja, vaikka sattuisit muistamaankin.)

Tehtävä 2: Esitä jokin tapa muodostaa sarjaratkaisu alkuarvoprobleemalle $y' = x^2 - y^2$, $y(0) = 1$. Sarjaratkaisua ei tarvitse laskea, vaan kuvata algoritmi, jolla se voidaan laskea esimerkiksi Mathematican avulla.

Tehtävä 3: Laske sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

summa muodostamalla funktion $f(x) = x^2$ Fourier'n sarja välillä $[-\pi, \pi]$.

Tehtävä 4: Määrittele, mitä tarkoitetaan funktion $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ raja-arvolla. Tutki funktion $f(x, y) = x^y$, $A = \{(x, y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ (x, y) \neq (0, 0)\}$, raja-arvoa origossa; määritä se, jos se on olemassa; jos se ei ole, perustele miksi ei.

Tehtävä 5: Osoita, että yhtälö $xy^3 + yz^3 + zx^3 + 1 = 0$ määrittelee funktion $z = f(x, y)$ pisteen $(-1, 1, 1)$ ympäristössä. Määritä funktion f ensimmäisen asteen Taylorin polynomi pisteessä $(-1, 1)$.

Tehtävä 6: Laske R-säteisen pallon ala ja tilavuus pallokoordinaatteja käyttäen.