Teknillinen korkeakoulu — Kivelä, Hakula / Nurmiainen

Mat-1.312 MATEMATIIKAN PERUSKURSSI T2

TENTTI 4.8.1997

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (AUT, TFY, TIK, TUO, SÄH, KON, KEM, MAK, PUU, MAA, RYK);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus.

Tentti kestää neljä tuntia.

Tehtävä 1: Määritä toisen kertaluvun lineaarinen ja homogeeninen differentiaaliyhtälö, jolla on ratkaisuina funktiot x ja e^x. Etsi yhtälön yksityisratkaisu, kun alkuehtona on $y(2) = 1$, $y'(2) = 0$. Voitaisiinko alkuehto antaa pisteessä $x = 1$? Perustelut.

Tehtävä 2: Tutki, suppenevatko sarjat

$$\text{a)}\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}, \qquad \text{b)}\ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}.$$

Esitä käyttämäsi suppenemistestit oletuksineen ja tarkasta oletuksien voimassaolo.

Tehtävä 3: Laske sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

summa muodostamalla funktion $f(x) = x^2$ Fourier'n sarja välillä $[-\pi, \pi]$.

Tehtävä 4: Esitä ainakin kaksi menettelyä funktion $f(x, y, z)$ maksimi- ja minimiarvojen etsimiseksi pallonpinnalla $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Kuvaa menettelyt siten, että ohjeidesi avulla voidaan suorittaa laskut Mathematicalla (tai jollakin muulla symbolisella ohjelmalla; komentojen tarkkoja nimiä tai syntaksia ei tarvitse esittää).

Tehtävä 5: Laske pohjoisen pallonpuoliskon keskimääräinen kaarietäisyys päiväntasaajasta. Vastaus (leveys)asteissa likiarvona. Mieti ensin, mitä keskiarvolla tässä tapauksessa tarkoitetaan; kirjaa määritelmäsi koepaperiin.

Tehtävä 6: Osoita, että pintaintegraali

$$\frac{1}{3} \oint \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}$$

laskettuna kolmiulotteisen avaruuden kappaleen reunapinnan yli antaa kappaleen tilavuuden.