Teknillinen korkeakoulu Kivelä, Hakula / Nurmiainen

**Mat-1.312 MATEMATIIKAN PERUSKURSSI T2** / kevät 1997

**TENTTI** 22.5.1997

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (AUT, TFY, TIK, TUO, SÄH, KON, KEM, MAK, PUU, MAA, RYK);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus. Tentti kestää neljä tuntia.

**Tehtävä 1:** Tutki sopivilla testeillä seuraavien sarjojen suppenemista/hajaantumista:
a) $\Sigma(\frac{n}{n+1})^n$, b) $\Sigma\frac{1}{2^n+1}$, c) $\Sigma\frac{2^n}{n}$, d) $\Sigma\frac{1}{\sqrt{2n}}$, e) $\Sigma(\frac{n}{2n+1})^n$, f) $\Sigma\frac{n}{n+1}$.

**Tehtävä 2:** a) Osoita, että ns. Eulerin yhtälö $x^2y'' + axy' + by = 0$ voidaan muuntaa vakiokertoimiseksi differentiaaliyhtälöksi sopivaa sijoitusta käyttäen.

b) Etsi differentiaaliyhtälön $x^2y'' - xy' - y = 0$ yleinen ratkaisu.

**Tehtävä 3:** Olkoon funktio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \text{ kun } (x,y) \neq (0,0), \; f(0,0) = 0.$$

Osoita, että funktio $f$ on origossa a) jatkuva ja b) derivoituva, mutta c) ei differentioituva.

**Tehtävä 4:** Olkoon $f(x,y) = \ln(1+x^2+y^2)$. Laske osittaisderivaatta $f_{xxxxxxyy}(0,0)$.

**Tehtävä 5:** Vektorikenttä $\mathbf{F} = \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ on määritelty muualla paitsi origossa.

a) Miksi Gaussin lausetta $\int_{B_R} \nabla \cdot \mathbf{F} dv = \oint_{\partial B_R} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ ei voida käyttää, jos $B_R$ on origokeskinen pallo?

b) Laske $\nabla \cdot \mathbf{F}$ ja $\nabla \times \mathbf{F}$.

**Tehtävä 6:** Määritä origokeskisen pallon (säde $= R$) hitausmomentti a) keskipisteen, b) origon kautta kulkevan halkaisijatason ja c) origon kautta kulkevan suoran (so. halkaisijan) suhteen.

Teknillinen korkeakoulu Kivelä, Hakula / Nurmiainen

**Mat-1.312 MATEMATIIKAN PERUSKURSSI T2** / kevät 1997

**TENTAMEN** 22.5.1997

Skriv tydligt på varje provpapper på skilda rader:
1) studieperiodens namn, datum;
2) studentnummer+bokstav, TEXTAT släktnamnet understreckat, alla förnamn;
3) utbildningsprogram (AUT, TFY, TIK, TUO, SÄH, KON, KEM, MAK, PUU, MAA, RYK);
4) eventuella tidigare namn och utbildningsprogram;
5) namnteckning. Tentamen varar fyra timmar.

**Uppgift 1:** Undersök med hjälp av lämpliga test, huruvida följande serier konvergerar eller divergerar:
a) $\Sigma(\frac{n}{n+1})^n$, b) $\Sigma\frac{1}{2^n+1}$, c) $\Sigma\frac{2^n}{n}$, d) $\Sigma\frac{1}{\sqrt{2n}}$, e) $\Sigma(\frac{n}{2n+1})^n$, f) $\Sigma\frac{n}{n+1}$.

**Uppgift 2:** a) Visa, att Euler-ekvationen $x^2y'' + axy' + by = 0$ kan omvandlas till en differentialekvation med konstanta koefficienter med hjälp av en lämplig substitution.

b) Bestäm allmänna lösningen till differentialekvationen $x^2y'' - xy' - y = 0$.

**Uppgift 3:** Låt funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \text{ då } (x,y) \neq (0,0), \; f(0,0) = 0.$$

Visa, att i origo är funktionen $f$ a) kontinuerlig och b) deriverbar, men c) inte differentierbar.

**Uppgift 4:** Låt $f(x,y) = \ln(1+x^2+y^2)$. Beräkna den partiella derivatan $f_{xxxxxxyy}(0,0)$.

**Uppgift 5:** Vektorfältet $\mathbf{F} = \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ är definierat överallt utom i origo.

a) Varför kan Gauss' sats $\int_{B_R} \nabla \cdot \mathbf{F} dv = \oint_{\partial B_R} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ inte användas, då $B_R$ är ett klot med mittpunkten i origo?

b) Beräkna $\nabla \cdot \mathbf{F}$ och $\nabla \times \mathbf{F}$.

**Uppgift 6:** Bestäm tröghetsmomentet hos ett klot (radien $= R$) med mittpunkten i origo med avseende på a) mittpunkten, b) ett diametralplan och c) en linje genom origo (dvs. en diameter).