Teknillinen korkeakoulu — Kivelä / Nurmiainen

Mat-1.312 MATEMATIIKAN PERUSKURSSI T2
Tentti, 14.1.1997

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (AUT, TFY, TIK, TUO, SÄH, KON, KEM, MAK, PUU, MAA, RYK);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus.

Tentti kestää neljä tuntia.

Tehtävä 1 : Laskuvarjohyppääjän nopeutta hidastaa nopeuden neliöön verrannollinen voima, jolloin Newtonin lain mukainen liikeyhtälö on

$$m\frac{dv}{dt} = mg - bv^2,$$

missä v on putoamisnopeus ja t on aika. Ratkaise differentiaaliyhtälö ja osoita, että on olemassa rajanopeus $\lim_{t\to\infty} v(t)$. Määritä rajanopeus, kun hyppääjä painaa $m = 80$ kg, hänen nopeutensa varjon auetessa on $v_0 = 10$ m/s, maan vetovoiman kiihtyvyydelle käytetään arvoa $g = 9.8$ m/s^2 ja hidastuvuuskerroin on $b = 30$ kg/m. Miten rajanopeus riippuu hyppääjän alkunopeudesta v_0?

Tehtävä 2 : Ratkaise differentiaaliyhtälö $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = e^{-2x}$.

Tehtävä 3 : Funktion f jaksona on 2π ja välillä $]-\pi, \pi]$ on $f(x) = e^x$. Muodosta funktion eksponenttimuotoinen Fourier'n sarja. Suppeneeko sarja tasaisesti?

Tehtävä 4 : Määritä ne suunnat, joissa funktion $f(x, y, z) = xyz$ suunnattu derivaatta pisteessä $(1, 2, 3)$ saa maksimi- ja minimiarvonsa. Mitkä nämä arvot ovat?

Tehtävä 5 : Yhtälöt

$$\begin{cases} x = uv\cos w, \\ y = uv\sin w, \\ z = \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \end{cases}$$

määrittävät käyräviivaiset koordinaatit u, v, w, ns. *parabolisen koordinaatiston.* Määritä skalaarikentälle $F(u, v, w) = uv + vw + wu$ lauseke $\triangle F(u, v, w)$, missä $\triangle$ tarkoittaa Laplacen operaattoria. Laske lausekkeen arvo pisteessä $(2, 3, \pi/4)$. Liitteenä asiaa koskeva luentoteksti.

Tehtävä 6 : Määrittele, mitä tarkoitetaan vektorikentän pyörteettömyydellä ja konservatiivisuudella. Millä ehdolla kentällä on skalaaripotentiaali? Osoita vektorikenttä $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$ pyörteettömäksi. Perustele, miksi sillä on skalaaripotentiaali ja laske se.