Teknillinen korkeakoulu Hakula/Nurmiainen

Mat-1.312 MATEMATIIKAN PERUSKURSSI T2/ kevät 1997

TIETOKONEHARJOITUKSET 4 (viikot(12-13/14)

1 Yleistä

`Diffeq` on tullut tutuksi jo kahden harjoituksen kautta. `Diffeq` ratkaisee asetut differentiaaliyhtälöt `matlabin` sisäänrakennetun `ode23`-rutiinin avulla. Tarjolla on kuitenkin myös muita "integraattoreita", joihin on tarkoitus tässä tutustua.

`SIMULINK` on `matlabin` laajennus (ns. toolbox), joka sisältää seuraavat meitä kiinnostavat rutiinit: `rk23, rk45, adams, gear`. Kaikille näille menetelmille on yhteistä se, että ne muuttavat askelpituutta automaattisesti. `adams` ja `gear` muuttavat vieläpä kertalukuakin tarpeen mukaan.

`rk23` ja `rk45` ovat Runge-Kutta menetelmiä ja olennaisesti samoja kuin `ode23` ja `ode45`. `adams` on esimerkki moniaskelmenetelmistä:

$$y_{n+1} = \sum_{j=0}^{p} \alpha_j y_{n-j} + h \sum_{j=-1}^{p} \beta_j f(x_{n-j}, y_{n-j}),$$

missä α_j ja β_j ovat sopivat parametrit (taulukoitu kirjallisuudessa). Nämä näyttävät implisiittisiltä, mutta ratkaisu lasketaan samaan tapaan approksimoiden kuin parannetussa Eulerin menetelmässäkin. `gear` sen sijaan on implisiittinen, ns. BDF (Backward differentiation) menetelmä:

$$y_{n+1} = \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j y_{n-j} + h\beta f(x_{n+1}, y_{n+1}).$$

`HUOM!` Nyt on aika käynnistää `matlab`. Ensimmäiseksi on annettava komento `InitT12`, muuten ajaudutaan hankaluuksiin tuotapikaa. Koska kahdessa viimeisessä harjoituksessa `mathematica` on sopivin väline, kertaamme hieman sen käyttöä harjoituksen loppuosassa.

Tavalliseen tapaan viimeiset vinkit löytyvät ohjetiedostosta:
`/p/edu/matpk/t/tietokoneharjoitus.4`

2 Esimerkki

Tarkastellaan seuraavaa systeemiä.

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= ay_1(x) - by_1(x)y_2(x) \\ y_2'(x) &= cy_1(x)y_2(x) - dy_2(x) \end{aligned}$$

Tätä systeemiä kutsutaan Lotka – Volterra saalis – peto malliksi: x on aika, y_1 kuvaa saalispopulaation kokoa, y_2 petopopulaation kokoa, ja a, b, c ja d ovat positiivisia parametreja. Tehtävän ratkaisemiseksi on ensin kirjoitettava tietyntyyppinen tiedosto, jossa systeemi kuvataan. Tämä on valmiina tiedostossa `lotvol.m`, jonka sisällön näet suorittamalla `type lotvol.m`. Tiedosto on seuraavanlainen.

```
function [f,y0]=lotvol(x,y,u,q,a,b,c,d)
   if abs(q)==1
      f(1)=a*y(1)-b*y(1)*y(2);
      f(2)=c*y(1)*y(2)-d*y(2);
   elseif q==0
      f=[2;0;0;0;0;0];
      y0=[1.1;2.2];
   else
      f=[];
   end
end
```

Parametrin `u` on oltava kutsussa vaikka sitä ei tässä tarvitakaan (se liittyy säätötekniikan sovellutuksiin). `q` on ohjelman sisäinen parametri: jos siis `abs(q)==1` niin lasketaan systeemin 'oikean puolen' arvot hetkellä `x` kohdassa `y(1)`, `y(2)` ja jos `q==0`, niin annetaan alkuarvo `y0` sekä vektorissa `f` muutamia sisäisiä parametreja, joista ensimmäinen kertoo yhtälöitten lukumäärän ja muita ei tässä tarvita (ne liittyvät jälleen säätötekniikkaan).

Halutaan ratkaista tehtävä välillä $x \in [0, 5]$, alkuarvolla $y(0) = (1.5, 0.4)$ ja parametrien arvoilla $a = 1$, $b = 2$, $c = 2$ ja $d = 3$. Tämä onnistuu seuraavasti:
`[x,y]=adams('lotvol',[0,5],[1.5,0.4],[],[],1,2,2,3)`

Siis ensimmäinen parametri ilmoittaa tiedoston nimen, toinen millä välillä ratkaisu halutaan, kolmas alkuarvot (huomaa, että komennossa voi antaa eri alkuarvon kuin mitä tiedostoon on kirjoitettu), neljättä ja viidettä ei tarvita, joten laitetaan tyhjät matriisit ja lopuksi yhtälöön liittyvät parametrit. `adams`in tilalla voi olla `rk45` tai `gear`, komennon muoto pysyy muuttumattomana.

Matriisissa `y` on ratkaisu ja vektorissa `x` on vastaavat ajanhetket. Kuten `x`:stä huomaat niin askelpituus ei pysy vakiona: liikkeelle lähdetään pienellä askeleella, minkä jälkeen askelpituutta pyritään kasvattamaan mahdollisimman suureksi. Ratkaisun voi piirtää ajan funktiona yksinkertaisesti komennolla `plot(x,y)`. Faasitasossa ratkaisun saa suoraviivaisesti: `plot(y(:,1),y(:,2))`.

3 `Matlab`-tehtävät

1. Tarkastele Lotka – Volterra systeemiä eri parametrien arvoilla. Miten alkuehto vaikuttaa? Systeemillä on kiintopiste kohdassa $y_1 = d/c$, $y_2 = a/b$, siis jos alkutila on kiintopisteessä, systeemi pysyy siinä 'ekologisessa tasapainossa' (toinen kiintopiste on $y_1 = y_2 = 0$). Jos alkutila ei ole kovin kaukana kiintopisteestä, saadaan stabiileja jaksollisia ratkaisuja. Kokeile miten parametrit vaikuttavat jakson pituuteen. Piirrettäessä faasitasoon jaksolliset ratkaisut vastaavat suljettuja käyriä. Kokeile.

2. Klassinen esimerkki kankeasta differentiaaliyhtälösysteemistä on

$$\begin{aligned} y_1' &= -0.04y_1 + 10^4 y_2 y_3, \\ y_2' &= 0.04y_1 - 10^4 y_2 y_3 - 3 \cdot 10^7 y_2^2, \\ y_3' &= 3 \cdot 10^7 y_2^2, \end{aligned}$$

   missä y_1, y_2 ja y_3 kuvaavat kolmen eri aineen konsentraatioita ajan funktiona. Yhtälön tekee kankeaksi se, että prosessissa on samanaikaisesti käynnissä kolme erilaista reaktiota, joitten 'aikavakiot' tai reaktiovakiot ovat hyvin erisuuret: $k_1 = 0.04$ (hidas reaktio), $k_2 = 10^4$ (nopea), $k_3 = 3 \cdot 10^7$ (hyvin nopea). Kokeile tähän eri menetelmiä ja vertaile suoritusaikoja ja tulosten laatueroja. Mitä menetelmää suosittelisit kesätyöpaikan toimitusjohtajalle? Tiedostossa `stiff.m` on valmis runko, jota voit täydentää Lotka – Volterra esimerkkiä seuraten. Käytä alkuarvoja jotka on annettu tiedostossa.

4 `Mathematica`-tehtävät

`Mathematican` ns. notebook-versio käynnistyy komennolla: (ensin `use math`)`mathematica`. Ohjelman käynnistyminen voi kestää jonkin aikaa...

3. Piirrä funktion $f(x, y) = arctan(y/x)$ kuvaaja. Miten funktio käyttäytyy origon ympäristössä? Miten sen voi luonnehtia geometrisesti?

4. Derivoi yhdistetty funktio $f(g(x))$. Laske yhdistetyn funktion $f(g(x, y), h(x, y))$ ensimmäisen kertaluvun derivaatat. Ovatko saadut lausekkeet sitä, mitä odotit? Laske myös toisen kertaluvun sekaderivaatat. Ovatko ne yhtä suuret? Pitäisikö niiden olla?