Mat-1.312 MATEMATIIKAN PERUSKURSSI T2 / kevät 1997

TIETOKONEHARJOITUKSET 2 (viikko 7 – 8)

Harjoituksissa tarkastellaan differentiaaliyhtälöiden ratkaisukäyriä Matlabin päälle TKK:ssa rakennetun demonstraatiopaketin **DiffEqLab** avulla. Käynnistämisohjeet ym. ovat löydettävissä tiedostosta `/p/edu/matpk/t/tietokoneharjoitus.2`.

Tehtävä 1: Piirrä ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöä $y' = \dfrac{t+y}{t-y}$ (tuntemattomana funktiona $y(t)$) vastaava suuntakenttä ja tähän useita ratkaisukäyriä. Differentiaaliyhtälö on valmiiksi ohjelmoituna **DiffEqLab**-pakettiin kuuluvassa tiedostossa `equ2.m`.

Kysymykset: Miksi käyrät katkeilevat siten kuin katkeilevat?

Tehtävä 2: Kuten edellinen tehtävä, mutta differentiaaliyhtälö $y' = \cos(x+y)$. Ohjelmoi yhtälö itse Matlabin funktioksi m-tiedostoon Emacsia käyttäen ja talleta se kotihakemistoosi. Ota mallia ensimmäisen tehtävän yhtälön ohjelmoinnista; koodin voit tulostaa Matlabin sisällä komennolla `type equ2`.

Kysymykset: Voivatko yhtälön ratkaisukäyrät olla suoria? Jos, niin mitkä ovat niiden yhtälöt?

Tehtävä 3: Toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö $y'' - (1-y^2)y' + y = 0$ (*van der Polin yhtälö*) on valmiiksi ohjelmoituna **DiffEqLab**-paketin tiedostossa `vdp.m`. Tutki ohjelmakoodia ja mieti, miksi se on sen näköinen kuin on.

Kysymykset: Millainen on yhtälöä vastaava normaaliryhmä? Onko yhtälö autonominen?

Tehtävä 4: Tutki van der Polin yhtälön ratkaisujen kuvaajia sekä aikariippuvuuden mukaan (ts. $y(t)$ ja $y'(t)$ ajan t funktioina) että faasitasossa (jossa toisella akselilla on y ja toisella y' ajan t ollessa käyräparametrin asemassa).

Kysymykset: Millainen alkuehto tarvitaan yksikäsitteiselle ratkaisulle? Miten tämä voidaan antaa toisaalta aikariippuvuuskuviossa, toisaalta faasitasossa? Eräs faasitason umpinainen käyrä on ratkaisukäyrien *attraktori*, ts. käyrä, jota ratkaisut lähestyvät. Millainen tämä on?

Tehtävä 5: Ohjelmoi *Airyn differentiaaliyhtälö* $y'' + xy = 0$ Matlabin m-tiedostoksi. Käytä mallina van der Polin yhtälöä. Tutki Airyn yhtälön ratkaisuja.

Kysymykset: Onko yhtälö autonominen? Miten tämän voi päätellä faasitasokuvasta? Miten yhtälön kahden eri ratkaisun nollakohdat suhtautuvat toisiinsa?

Tehtävä 6: Kappaleen (planeetan) liikettä keskeisvoimakentässä hallitsee Newtonin lakien mukainen differentiaaliyhtälö $\mathbf{r}'' = -a\dfrac{\mathbf{r}}{r^3}$, missä pilkut tarkoittavat derivaattoja ajan suhteen, $\mathbf{r}$ on paikkavektori, $r = |\mathbf{r}|$ tämän pituus ja a vakio. Oletetaan tunnetuksi, että kyseessä on tasoliike, jolloin siis $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j}$. Vastaava normaaliryhmä on

$$x' = u, \quad y' = v, \quad u' = -ax/(x^2+y^2)^{3/2}, \quad v' = -ay/(x^2+y^2)^{3/2},$$

missä u ja v ovat nopeuden komponentit. Ryhmä on valmiiksi ohjelmoituna **DiffEqLab**-paketin tiedostossa `planet.m` (missä on asetettu $a = 1$). Tutki koodia ja piirrä ratkaisukäyriä.

Kysymykset: Minkä eri tyyppien käyriä ratkaisukäyrien pitäisi olla? Saatko kaikki tapaukset esiin antamalla sopivan alkuehdon?

Kiinnostuneet voivat kopioida **DiffEqLab**-paketin itselleen. Käyttöä varten tarvitaan Matlab 4.x jossakin koneessa (Unix/X-Windows, PC-Windows; periaatteessa myös Mac, jota tosin ei ole kokeiltu). Tarkemmat ohjeet kurssin WWW-sivuilla.