Teknillinen korkeakoulu — Kivelä / Nurmiainen

Mat-1.312 MATEMATIIKAN PERUSKURSSI T2 / kevät 1997

TIETOKONEHARJOITUKSET 1 (viikko 5)

Tarkoituksena on tutkia potenssisarjan määrittelemää funktiota. Luonnollinen työkalu on Mathematica, mikäli ei toisin mainita. Kaikkia tehtäviä ei ole välttämätöntä ehtiä käsitellä. Aloita alusta ja etene niin pitkälle kuin ehdit; tee kuitenkin lopuksi tehtävä 6.

Lisäohjeita on tiedostossa `/p/edu/matpk/t/tietokoneharjoitus.1`, mutta nämä eivät ole yhtä yksityiskohtaisia kuin syksyllä. **Kertaa asiat Mathematica-oppaasta ennen harjoitusta!**

Tehtävä 1: Potenssisarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$$

kertoimet toteuttavat rekursion

$$c_1 = 1, \qquad c_{k+1} = \left(k - k^2 \ln \frac{k+1}{k}\right) c_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Määritä sarjan suppenemissäde R tarkastelemalla lausekkeen c_{k+1}/c_k raja-arvoa.

Kysymykset: Miten suppenemissäteen arvo saadaan raja-arvosta? Millainen on suppenemisympyrä kompleksitasossa? Mitä tiedetään sarjan suppenemisesta ympyrän kehällä?

Tehtävä 2: Määritellään funktio $f(z)$ edellisen tehtävän potenssisarjan summaksi sen suppenemisalueessa. Piirrä funktion kuvaaja $y = f(x)$, kun x on reaalinen ja $-R < x < R$.

Kysymykset: Näyttääkö sarja suppenevan suppenemisvälin päätepisteissä?

Tehtävä 3: Rajoitetaan em. funktion $f(x)$ argumentti puhtaasti imaginaariseksi, so. tarkastellaan arvoja $f(iy)$. Tutki, ovatko funktion arvot tällöin puhtaasti imaginaarisia. Piirrä funktion reaaliosan $\operatorname{Re} f(iy)$ ja imaginaariosan $\operatorname{Im} f(iy)$ kuvaajat.

Kysymykset: Millä muuttujan y arvoilla reaaliosa- ja imaginaariosafunktio ovat määriteltyjä? Miten näyttää käyvän määrittelyvälien päätepisteissä?

Tehtävä 4: Tarkastellaan funktiota $f(z)$ kompleksitasossa, $|z| < R$. Tällöin $\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} f(x+iy)$ voidaan tulkita kahden reaalimuuttujan (x, y) reaaliarvoiseksi funktioksi; vastaavasti $\operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} f(x+iy)$. Piirrä näiden kuvaajat xyz-avaruudessa.

Kysymykset: Miltä suppeneminen näyttää ympyrän reunoilla? Ovatko kuvat yhteensopivia edellisten tehtävien kuvaajien kanssa?

Tehtävä 5: Funktio $|f(z)| = |f(x+iy)|$ voidaan vastaavasti tulkita kahden reaalimuuttujan reaaliarvoiseksi funktioksi. Piirrä tämänkin kuvaaja. Sama koskee kompleksiluvun $f(z)$ napakulmaa esittävää funktiota $\arg f(z) = \arg f(x+iy)$. Tutki myös tätä. Täysi informaatio funktion arvoista — sekä $|f(x+iy)|$ että $\arg f(x+iy)$ — voidaan esittää samassa kuvassa värittämällä itseisarvon kuvaaja napakulman arvojen mukaisesti.

Kysymykset: Miten saadut kuvaajat sopivat yhteen aiemmin muodostettujen kanssa?

Tehtävä 6: Kopioi tiedosto `/p/edu/matpk/t/ht1_6.m` omaan hakemistoosi, käynnistä Matlab ja aja tiedosto.

Kysymykset: Mitä syntyneet kuvat esittävät?