Teknillinen korkeakoulu Kivelä / Nurmiainen

Mat-1.312 MATEMATIIKAN PERUSKURSSI T2 / kevät 1997

HARJOITUSTEHTÄVIÄ

Kotitehtävien numerot seuraavaa viikkoa varten ilmoitetaan keskiviikon luennolla ja Otaxin news-ryhmässä *opinnot.mat.t2*.

Tässä kokoelmassa on lähes kaksi kertaa niin paljon tehtäviä kuin kotilaskuharjoituksissa on tarkoitus käsitellä. Tehtävien ratkaisemisessa voi — ja on suositeltavaa — soveltuvin kohdin käyttää myös Matlabia tai Mathematicaa.

Tietokoneharjoitusten tehtävät monistetaan erikseen samaan tapaan kuin syksyllä ja ne ovat jaossa kyyhkyslakoissa.

1. [SD/1/1] Todista, että lukujono $\langle a_k \rangle$ suppenee ja sen raja-arvo on ≤ 2, kun jono määritellään rekursiivisesti

$$a_0 = 0, \qquad a_{k+1} = \sqrt{2 + \sqrt{a_k}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Esitä yhtälö, josta raja-arvo voidaan ratkaista.

2. [SD/1/5] Tutki, suppenevatko seuraavat kompleksitason lukujonot $\langle z_k \rangle$:

$$\text{a) } z_k = \frac{i^k}{\sqrt[k]{k}}, \quad \text{b) } z_k = \frac{\pi}{2} + \frac{e^{ik\pi/4}}{k\pi}, \quad \text{c) } z_k = \frac{(1+i)^k}{k^2}.$$

Onko jonoilla kasautumispisteitä? Piirrä jonojen pisteitä kompleksitasoon.

3. [SD/1/6] Olkoon s_k yksikköympyrän sisään piirretyn säännöllisen 2^k-kulmion sivun pituus. Johda rekursiokaava, jossa s_{k+1} lausutaan edellisen luvun s_k avulla. Mikä on sopiva alkuarvo täten saatavalle rekursiivisesti määritellylle jonolle?

4. [SD/1/7] Muodosta edellisen tehtävän jonon avulla lukujono $\langle p_k \rangle$, missä jonon luvut esittävät yksikköympyrän sisään piirretyn 2^k-kulmion piiriä. Laske Matlabin avulla tämän jonon termejä ja yritä saada näiden avulla niin tarkka approksimaatio luvulle π kuin mahdollista. Kuinka monta oikeata desimaalia saadaan?

5. [SD/1/10] Laske sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

osasummia pienillä indeksin arvoilla ja arvaa näiden perusteella osasumman s_n lauseke. Todista arvauksesi. Osoita, että sarja suppenee ja määritä sen summa.

6. [HRIII/29/1] Todista, että suppenevan sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ termien joukko $\{ a_k \mid k \in \mathbb{N} \}$ on rajoitettu.

7. [HRIII/29/7] Olkoon $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppeneva sarja ja sen summa $= s$. Osoita, että sarja $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + a_{k+2})$ suppenee, ja määritä sen summa.

8. [HRIII/29/8] Osoita oikeaksi tai vääräksi seuraavat väitteet: a) Jos $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee, niin myös $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + a_k^2)$ suppenee. b) Jos $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ suppenee, niin myös $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + a_k^2)$ suppenee.

9. [SD/2/2] Millä muuttujan $x \in \mathbb{R}$ arvoilla sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \tan^k x$$

suppenee? Mikä on sen summa? Piirrä summafunktion kuvaaja.

10. [HRIII/29/2] Kehitä funktio

$$f(x) = \frac{1}{a+bx}, \quad a \neq 0, \ b \neq 0,$$

sarjaksi a) muuttujan x nousevien, b) sen laskevien potenssien mukaan. Millä muuttujan arvoilla sarja suppenee?

11. [SD/2/5] Akhilles ja kilpikonna juoksevat kilpaa. Akhilles juoksee kymmenen kertaa niin nopeasti kuin kilpikonna. Varmana voitostaan Akhilles antaa kilpikonnalle yhden stadionin (164 – 192 metriä muinaiskreikkalaisesta paikkakunnasta riippuen) etumatkan. Kun Akhilles on juossut yhden stadionin, on kilpikonna juossut stadionin kymmenesosan ja on siis tämän verran edellä. Kun Akhilles on juossut tämän kymmenesosan verran lisää, on kilpikonna juossut yhden sadasosastadionin lisää ja on edelleen edellä. Näin kilpailu jatkuu loppumattomiin kilpikonnan jatkuvasti johtaessa. Eikö Akhilles voitakaan? Jos voittaa, niin miten pitkän matkan juostuaan hän ohittaa kilpikonnan?

12. [SD/2/6] Tutki seuraavien sarjojen suppenemista annettuja positiivitermisten sarjojen suppenemistestejä käyttäen:

$$\begin{array}{lll}
\text{a)} & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1+k}{2+k^2}\right)^2, & \text{vertailutesti,} \\
\text{b)} & \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \sin\frac{\pi}{2^k}, & \text{suhdetesti,} \\
\text{c)} & \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1+\frac{1}{k})^{k^2}}{3^k}, & \text{juuritesti,} \\
\text{d)} & \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\ln k}, & \text{integraalitesti.}
\end{array}$$

13. [SD/2/11] Tutki seuraavien sarjojen suppenemista:

$$\text{a)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k}, \qquad \text{b)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{2^k k}, \qquad \text{c)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^k}.$$

14. [SD/2/9] Olkoon $p, q \in \mathbb{N}$, $0 < q < p$. Tutki seuraavien sarjojen suppenemista:

$$\text{a)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^p - k^q}, \qquad \text{b)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p^k - q^k}, \qquad \text{c)} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k+q} - \frac{1}{k+p}\right).$$

15. [SD/2/15] Olkoon

$$a_k = \frac{k^k}{(k!)^2}.$$

Osoita, että $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ tarkastelemalla sarjaa $\sum a_k$.

16. [SD/2/16] Todista: Jos $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_k \geq a_{k+1} \geq \cdots \geq 0$ ja sarja $\sum a_k$ suppenee, niin $\lim_{k\to\infty} k a_k = 0$.

17. [SD/2/17] Osoita esimerkillä, että jos edellisessä tehtävässä luovutaan jonoa $\langle a_k \rangle$ koskevasta monotonisuusoletuksesta, niin väite ei enää välttämättä päde.

18. [SD/2/19] Tutki seuraavien sarjojen suppenemista:

$$\text{a)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k - \ln k}, \qquad \text{b)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt[k]{k}}, \qquad \text{c)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{k}.$$

19. [SD/2/22] Luku π voidaan laskea seuraavista sarjoista:

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\sqrt{3}(-1)^k}{3^k(2k+1)}.$$

Kuinka monta termiä sarjoihin on otettava, jotta π saataisiin 10 desimaalin tarkkuudella?

20. [SD/2/23] Tarkastellaan sarjaa $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, missä

$$a_{2p-1} = \frac{1}{\sqrt{p+1} - 1}, \qquad a_{2p} = -\frac{1}{\sqrt{p+1} + 1}, \qquad p = 1, 2, 3, \ldots.$$

Kirjoita sarjan kahdeksan ensimmäistä termiä. Osoita, että sarja hajaantuu ryhmittämällä termit kahden termin ryhmiin (ts. laske $a_{2p-1} + a_{2p}$). Miksi sarjaan ei voida soveltaa Leibnizin lausetta?

21. [SD/3/3] Millä arvoilla $x \in \mathbb{R}$ sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1 + x^{2k}}$$

suppenee?

22. [SD/3/6] Osoita, että sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{\sqrt[10]{k}}$$

suppenee, mutta ei suppene itseisesti. Sarjan termit järjestetään uudelleen siten, että sen summaksi tulee syntymäpäiväsi päivämäärä; mitkä alkuperäisen sarjan termeistä ovat uudelleen järjestetyn sarjan 20 ensimmäistä termiä?

23. [SD/3/9] Muodosta sarjojen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad \text{ja} \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

Cauchyn tulo ja vaadi, että tämä on $= 1$ (so. sarja, jonka nollas termi on $= 1$ ja muut termit $= 0$). Määritä termit b_k. Mitä funktioita sarjat mahtavat esittää?

24. [SD/4/23] Tutki, millä muuttujan $x \in \mathbb{R}$ arvoilla funktiojono $\langle f_k \rangle$ suppenee, kun

$$\text{a) } f_k(x) = \frac{2^k}{x^{2k}+1}, \qquad \text{b) } f_k(x) = \frac{2^k}{x^{2^k}+1}, \qquad \text{c) } f_k(x) = \frac{x^k}{x^{2k}+1}.$$

Mikä on rajafunktio?

25. [HRIII/29/11] Tutki, millä muuttujan $x \in \mathbb{R}$ arvoilla sarja $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ suppenee, kun

$$\text{a) } f_k(x) = \frac{2^k}{x^{2k}+1}, \qquad \text{b) } f_k(x) = \frac{2^k}{x^{2^k}+1}, \qquad \text{c) } f_k(x) = \frac{x^k}{x^{2k}+1}.$$

Piirrä summafunktion kuvaaja.

26. [SD/4/2] Tarkastellaan reaalilukujoukossa funktiojonoja

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2} \quad \text{ja} \quad g_n(x) = f_n'(x).$$

Piirrä funktioiden kuvaajia. Tutki, suppenevatko funktiojonot tasaisesti. Millaisia ovat rajafunktiot?

27. [SD/4/7] Osoita Weierstrassin testiä käyttäen, että sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k(1+kx^2)}$$

suppenee tasaisesti joukossa $\mathbb{R}$.

28. [SD/4/8] Osoita, että sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^2+k}{k^2}$$

suppenee tasaisesti jokaisella rajoitetulla välillä $[-a,a]$. Voidaanko tarkastelussa käyttää Weiersrassin testiä? Entä Leibnizin lausetta?

29. [SD/4/9] Tutki, suppeneeko sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x}{1+k^2x^2}$$

tasaisesti välillä $[0,\infty[$. Onko suppeneminen tasaista välillä $[a,\infty[$, missä $a>0$?

30. [SD/4/10] Osoita Weierstrassin testiä käyttäen, että funktioterminen sarja $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{z^k}{|z|^{2k}+2}$ suppenee tasaisesti kompleksitason ympyrärenkaassa $2 \le |z| \le 3$.

31. [SD/4/13] Oletetaan, että sarja $\sum f_k(x)$ suppenee tasaisesti ja $\sum |f_k(x)|$ pisteittäin välillä $[a,b]$. Seuraako tästä, että $\sum |f_k(x)|$ suppenee tasaisesti ko. välillä? Tarkastele esimerkkinä funktioita $f_k(x) = (-1)^k x^k (1-x)$ välillä $[0,1]$.

32. [SD/4/15] Osoita, että sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^2}$$

suppenee tasaisesti koko reaalilukujoukossa. Onko sarjan summafunktio jatkuva? Piirrä tämän kuvaaja.

33. [SD/4/16] Funktiojono $\langle f_n \rangle$ määritellään seuraavasti:

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & \text{kun } x \in [0, \frac{1}{n}], \\ -n^2 x + 2n, & \text{kun } x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}], \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Määritä jonon rajafunktio. Päteekö

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx\ ?$$

34. [SD/4/17] Olkoon $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio ja olkoon $\langle f_n \rangle$ edellisen tehtävän funktiojono. Määritä

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x) g(x)\,dx.$$

35. [SD/4/20] Osoita, että sarja

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-kx}$$

suppenee tasaisesti välillä $[1,2]$ ja laske integraali $\int_1^2 s(x)\,dx$.

36. [SD/4/22] Tutki, millä arvoilla $x \in \mathbb{R}$ funktio

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{kx}/k^2$$

on määritelty. Millä alueella summafunktion derivaatta ja integraalifunktio voidaan muodostaa termeittäin derivoimalla ja integroimalla?

37. [SD/5/3] Määritä seuraavien potenssisarjojen suppenemisympyrät:

$$\text{a)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!} (z-1)^k, \qquad \text{b)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k} (z-i)^k, \qquad \text{c)} \sum_{k=1}^{\infty} k^p (z+2+3i)^k, \quad p \in \mathbb{N}.$$

38. [SD/5/5] Määritä potenssisarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2k+1}{2^k} z^{2k}$$

suppenemissäde ja summa palauttamalla se sopivaan geometriseen sarjaan.

39. [SD/5/11] Muodosta funktion

$$f(z) = \frac{2z+5}{z^2+2z+5}$$

osamurtokehitelmä kompleksialueella. Tulkitse syntyneet termit lausekkeen $z-1$ potenssien mukaan etenevien geometristen sarjojen summiksi ja muodosta funktion potenssisarja pisteessä $z=1$. Arvioi sarjan kertoimien avulla numeerisesti suppenemissädettä. Millä reaaliakselin avoimella välillä sarja suppenee? Miten suppenemissäde suhtautuu nimittäjän nollakohtiin?

40. [SD/5/16] Muodosta origokeskinen potenssisarja funktiolle $\ln(1+x)$ ja tämän avulla funktiolle

$$f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x}.$$

Mitkä ovat sarjojen suppenemissäteet? Minkä lukujen logaritmit jälkimmäisen sarjan avulla voidaan laskea?

41. [SD/5/20] Johda Maclaurinin sarja funktiolle $\sin^2 x$. Tapoja on useita; esitä ainakin kolme.

42. [SD/5/24] Muodosta funktion $y = \tan x$ Maclaurinin sarja $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ sijoittamalla tähän sarjaan funktion $x = \overline{\arctan}\, y$ Maclaurinin sarja ja vaatimalla, että tulos on $= y$.

43. [SD/5/26] Etsi sellainen potenssisarja, että tämän Cauchyn tulo itsensä kanssa on

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2(2k)!}\, z^{2k}.$$

Mikä tunnettu trigonometrian kaava on kyseessä?

44. [SD/5/28] Muodosta funktiolle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin tx}{t}\, dt,$$

origokeskinen Taylorin sarja. Millä muuttujan x arvoilla sarja suppenee?

45. [SD/6/3] Muodosta a) eksponenttimuotoinen, b) trigonometrinen Fourier'n sarja funktiolle $f(x) = |x|$ välillä $[-\pi, \pi]$.

46. [SD/6/9] Funktion jaksona on $2p$ ja se muodostuu kolmioaalloista:

$$f(x) = \begin{cases} p + x, & \text{kun } x \in \,]-p, 0[, \\ p - x, & \text{kun } x \in \,]0, p[. \end{cases}$$

Piirrä funktion kuvaaja ja laske sen trigonometrinen Fourier'n sarja.

47. [SD/6/16] Laske funktion

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{kun } x \in \,]-\pi, 0[, \\ 1, & \text{kun } x \in \,]0, \pi[, \end{cases}$$

eksponenttimuotoinen Fourier'n sarja. Suppeneeko se tasaisesti kohden funktiota f? Saadaanko sarja derivoimalla funktion $|x|$ Fourier'n sarja termeittäin?

48. [SD/6/17] Laske sarjojen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \quad \text{ja} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$$

summat käyttämällä hyväksi funktion $f(x) = |x|$ Fourier'n sarjaa välillä $[-\pi, \pi]$.

49. [SD/6/28] Kehitä funktio $\cos^2 x$ a) sinisarjaksi, b) kosinisarjaksi välillä $[0, \pi]$. Millaisia 2π-jaksoisia funktioita sarjat esittävät?

50. [SD/7/1] Osoita, että $y = e^{-2x}(C_1 \sin x + C_2 \cos x)$ on differentiaaliyhtälön $y'' + 4y' + 5y = 0$ ratkaisu. Määritä alkuehdon $y(0) = y'(0) = 1$ toteuttava ratkaisu.

51. [SD/7/2] Osoita, että differentiaaliyhtälöllä $y'^2 = 4y$ on ratkaisuna $y = (x+C)^2$ ja $y = 0$; tässä C on vakio. Millaisia ovat ratkaisukäyrien kuvaajat? Mitä muita ratkaisuja differentiaaliyhtälöllä on?

52. [SD/7/4] Määritä alkuarvoprobleeman $xy' = x + y$, $y(1) = 1$ ratkaisukäyrän kaarevuus alkuehtopisteessä.

53. [HRIV/1/3] Muodosta suoraparven $y = Cx + 2C^2$ (C parametri) differentiaaliyhtälö. Yhtälöllä on erikoisratkaisuna eräs toisen asteen polynomi; määritä tämä. Piirrä muutamien yksityisratkaisujen sekä erikoisratkaisun kuvaaja. Miten nämä suhtautuvat toisiinsa? Tarkista väitteesi laskemalla.

54. [SD/7/5] Johda sen käyräparven differentiaaliyhtälö, johon kuuluvat kaikki xy-tason R-säteiset ympyrät. (Parvella on siis kaksi parametria: ympyrän keskipisteen koordinaatit. R on vakio.) Mitä saatu yhtälö ilmaisee parven käyrien kaarevuussäteistä?

55. [SD/7/13] Palauta toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö $yy'' + xy' = 0$ ensimmäisen kertaluvun normaaliryhmäksi $Y' = F(x, Y)$. Millainen vektoriarvoinen funktio F on?

56. [SD/7/9] Kappaleen (planeetan) liikettä keskeisvoimakentässä hallitsee Newtonin lakien mukainen differentiaaliyhtälö

$$\mathbf{r}'' = -a\frac{\mathbf{r}}{r^3},$$

missä pilkut tarkoittavat derivaattoja ajan suhteen, $\mathbf{r}$ on paikkavektori, $r = |\mathbf{r}|$ tämän pituus ja a vakio. Oletetaan tunnetuksi, että kyseessä on tasoliike, jolloin siis $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j}$. Hajota differentiaaliyhtälö komponenttifunktioita $x(t)$ ja $y(t)$ koskevaksi kahden yhtälön ryhmäksi ja palauta tämä neljän yhtälön ensimmäisen kertaluvun ryhmäksi ottamalla nopeuskomponentit uusiksi tuntemattomiksi funktioiksi.

57. [HRIV/2/3] Ratkaise seuraavat alkuarvoprobleemat:

a) $y' = e^{|x|},\ y(-1) = -1,$ b) $y' = \sin|x|,\ y(-\pi) = 0,$ c) $y'\,\overline{\arctan}\,y = 1,\ y(1) = 1,$
d) $y'\sin x = y\ln y,\ y(\frac{\pi}{2}) = 1,$ e) $(1+e^x)yy' = e^x,\ y(1) = 1,$ f) $\cos^2 x\cos(\ln y)y' = y,\ y(\frac{\pi}{4}) = 1.$

58. [HRIV/2/10] Ratkaise seuraavat differentiaaliyhtälöt:

a) $(x+y)^2 y' = 1,$ b) $y' = (2x+y+3)^2,$ c) $y' = \cos(x+y).$

59. [HRIV/4/5] Olkoon funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kaikkialla jatkuvasti derivoituva ja $\neq 0$. Etsi yhtälön

$$f'\left(\frac{y}{x}\right)\left(y' - \frac{y}{x}\right) = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

yleinen integraali.

60. [SD/8/3] Totea differentiaaliyhtälö $2xyy' - y^2 + x^2 = 0$ tasa-asteiseksi ja ratkaise se tähän tilanteeseen sopivalla sijoituksella. Mitä mahdetaan tarkoittaa, kun yhtälöä kutsutaan erään *ympyräparven* differentiaaliyhtälöksi?

61. [SD/8/4] Ratkaise differentiaaliyhtälö $e^y y' = x + e^y - 1$ sijoituksella $u = x + e^y$.

62. [SD/8/10] Utopian valtakunnassa väestö haluaa sitä vähemmän hyödykkeitä, mitä enemmän se on jo niitä hankkinut. Niinmuodoin elintason nousu on kääntäen verrannollinen jo saavutettuun elintasoon. Tutki, kasvaako elintaso rajatta Utopiassa. Voidaanko tällä mallilla kuvata Utopian elintasoa hamasta muinaisuudesta kaukaiseen tulevaisuuteen?

63. [HRIV/2/8] Säiliössä on 100 litraa suolaliuosta, joka sisältää aluksi 5 kg suolaa. Säiliöön tuodaan nopeudella 5 l/min suolaliuosta, jossa on suolaa 30 g/l. Samalla nopeudella säiliöstä virtaa ulos liuosta. Oletetaan, että liuosta sekoitetaan niin hyvin, että se kaiken aikaa pysyy homogeenisena. Paljonko säiliössä on suolaa tunnin kuluttua?

64. [HRIV/14/5] Ratkaise seuraavat differentiaaliyhtälöt:

a) ${y''}^2 = y'$, b) $y'' = 1 - {y'}^2$, c) $xy'' + (x-1)y' = 0$, d) $xy'' = y' \ln \dfrac{y'}{x}$,
e) $y^3 y'' = 1$, f) $\sqrt{y}y'' = 1$, g) $y'' = e^y$, h) $yy'' = 1 + {y'}^2$,
i) $2yy'' - 3{y'}^2 = 4y^2$, j) $(1 + y^2)y'' = y' + {y'}^3$.

65. [HRIV/21/4] Muodosta seuraavia differentiaaliyhtälöitä vastaavat normaaliryhmät ja ratkaise ne:

a) $y''' = {y''}^3$, b) $y''' + {y''}^2 = 0$, c) $y'y''' = 2{y''}^2$, d) $x^2 y^{(4)} = 2y''$, e) $xy^{(5)} = y^{(4)}$.

66. [SD/8/13] Palauta differentiaaliyhtälö $yy'' + 2{y'}^2 = 0$ ensimmäisen kertaluvun normaaliryhmäksi. Onko ryhmä autonominen? Etsi yhtälön yleinen ratkaisu. Määritä ratkaisukäyrä, joka sivuaa suoraa $y = k(x-1) + 1$ pisteessä $(1, 1)$. Piirrä ratkaisukäyrän kuvaajia muuttujan k eri arvoilla.

67. [HRIV/14/9] Määritä ne käyrät, joilla kiinteästä muuttujan arvosta laskettu kaarenpituus on suoraan verrannollinen tangentin suuntakulman tangenttiin.

68. [HRIV/6/8] Olkoot funktiot $f(x)$ ja $g(x)$ jatkuvasti derivoituvia välillä I ja olkoon tällä välillä $f(x) \neq 0$. Etsi ensimmäisen kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö, jonka yleinen ratkaisu on $y = Cf(x) + g(x)$.

69. [SD/9/2] Olkoon $y_1(x) = x^2$ ja $y_2(x) = x|x|$. Osoita, että funktiot ovat lineaarisesti riippumattomia ja että niiden Wronskin determinantti on $= 0$. Onko mahdollista muodostaa toisen kertaluvun lineaarinen ja homogeeninen differentiaaliyhtälö, jonka ratkaisuja em. funktiot ovat?

70. [SD/9/4] Osoita, että eksponenttifunktio ja logaritmifunktio ovat differentiaaliyhtälöä

$$(x^2 + x)y''' + (2 - x^2)y'' - (2 + x)y' = 2(1 - x - x^2)$$

vastaavan homogeeniyhtälön ratkaisuja. Totea, että epähomogeenisella yhtälöllä on ratkaisuna eräs toisen asteen polynomi. Mikä on yhtälön yleinen ratkaisu?

71. [HRIV/15/4] Lineaarisella homogeenisella toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöllä on yksityisratkaisuina $y_1(x) = x$ ja $y_2(x) = \cos x$. Muodosta yhtälö ja määritä sen ratkaisuista se, jonka kuvaaja sivuaa suoraa $y = x + 1$ origossa.

72. [HRIV/15/7a] Olkoon funktio $P(x)$ derivoituva. Tee differentiaaliyhtälöön $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ sijoitus

$$y(x) = u(x)e^{-\frac{1}{2}\int P(x)\,dx}$$

ja saata se muotoon $u'' + I(x)u = 0$. Millainen funktio on $I(x)$?

73. [HRIV/6/3] Ratkaise seuraavat alkuarvoprobleemat:

$$\begin{aligned}
&\text{a) } xy' + 2y = x^3,\ y(1) = 1,\\
&\text{b) } y' + y\cos x = \sin x\cos x,\ y(0) = 1,\\
&\text{c) } y' + |x - |x||\,y = x,\ y(0) = 0.
\end{aligned}$$

74. [SD/9/11] Ratkaise alkuarvoprobleema $y'' + x(y' - y'') = y + 1$, $y(0) = y'(0) = 0$.

75. [HRIV/15/5] Määritä seuraavien yhtälöiden yleiset ratkaisut, kun eräs yksityisratkaisu tai sen muoto on annettu:

$$\begin{aligned}
&\text{a) } xy'' - (x+3)y' + y = 0, \quad \text{polynomi},\\
&\text{b) } x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = 0, \quad \text{polynomi},\\
&\text{c) } (x^2 - 2x - 1)y'' - 2(x-1)y' + 2y = 0, \quad \text{polynomi},\\
&\text{d) } y'' + (\tan x - 2\cot x)y' + 2(\cot^2 x)y = 0, \quad \sin x,\\
&\text{e) } y'' + 2(1 - \tan^2 x)y = 0, \quad \cos^2 x,\\
&\text{f) } (x-2)y'' - (4x-7)y' + (4x-6)y = 0, \quad e^{kx}.
\end{aligned}$$

76. [HRIV/16/1] Differentiaaliyhtälöllä $y'' + y = 0$ on yksityisratkaisuina $\sin x$ ja $\cos x$. Etsi yleisellä vakioiden varioinnilla differentiaaliyhtälöiden

$$\text{a) } y'' + y = \tan x, \qquad \text{b) } y'' + y = 2x\sin x$$

yleiset ratkaisut.

77. [HRIV/9/2] *Riccati'n differentiaaliyhtälö* on muotoa $y' = A(x) + B(x)y + C(x)y^2$. Jos sen yksityisratkaisu $y_0(x)$ tunnetaan, se voidaan palauttaa Bernoulli'n yhtälöksi sijoituksella $y = y_0 + z$. Ratkaise tällä tavoin seuraavat Riccati'n yhtälöt, joiden yksityisratkaisun muoto tunnetaan:

$$\begin{aligned}
&\text{a) } y' = 1 + x + x^2 - (2x+1)y + y^2, \quad y_0(x) = ax + b,\\
&\text{b) } y' = y^2 - x^2 y - (x-1)^2, \quad y_0(x) = ax^2 + bx + c,\\
&\text{c) } x^2 y' + (xy - 2)^2 = 0, \quad y_0(x) = \frac{a}{x}.
\end{aligned}$$

78. [HRIV/7/3] Määritä yhtälön $y' = |y - x|$ yleinen ratkaisu. Piirrä suuntakenttä ja ratkaisukäyriä. Määritä $y(1)$, kun y toteuttaa alkuehdon a) $y(-1) = -\frac{1}{2}$, b) $y(-1) = \frac{1}{2}$.

79. [HRIV/17/5] Etsi seuraavien yhtälöiden yleiset ratkaisut:

$$\begin{array}{lll}
\text{a) } y'' + 4y' + 5y = 3x - 2, & \text{b) } y'' - y' - 2y = 4x, & \text{c) } y'' - 7y' + 6y = \sin x,\\
\text{d) } y'' + 4y = \sin 3x, & \text{e) } y'' + 2y' + 5y = e^{-x}, & \text{f) } y'' - 2y' + y = e^x + \cos x,\\
\text{g) } y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} + \sin x, & \text{h) } y'' - 4y = xe^{2x}, & \text{i) } y'' - 6y' + 9y = e^{3x}/x^2.
\end{array}$$

80. [HRIV/17/2] Sovella yleistä vakioiden variointia yhtälön $y''+ay'+by = R(x)$ yksityisratkaisun etsimiseen, kun a^2-4b on a) >0, b) $=0$, c) <0.

81. [SD/9/16] Laske yhtälön $y''+ay'+by=0$ perusratkaisujen Wronskin determinantti vakioiden a, b kaikilla arvoilla.

82. [SD/9/17] Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y'''' - 4y''' + 12y'' + 4y' - 13y = 9e^{2x} + 52x - 3.$$

83. [HRIV/22/5b] Ratkaise alkuarvoprobleema

$$x^3y''' + xy' - y = 0, \quad y(1) = 1,\ y'(1) = 2,\ y''(1) = 3.$$

84. [SD/9/26] Sähköisen RL-piirin differentiaaliyhtälö on

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t),$$

missä tuntematin funktio $I(t)$ esittää virtaa, L ja R (induktanssi ja vastus) ovat piirille karakteristisia vakioita ja $E(t)$ on piiriin syötetty jännite. Ratkaise differentiaaliyhtälö tapauksissa a) $E(t) = E_0 =$ vakio, b) $E(t) = E_0 \sin \omega t$. Millainen fysikaalinen tulkinta ratkaisulle voidaan antaa?

85. [HRIV/17/9] Pitkin x-akselia liikkuvan massapisteen yhtälö olkoon

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx,$$

missä muuttuja t on aika, massa m ja k positiivisia vakioita. Määritä $x(t)$ alkuehdolla $x(0) = R$, $x'(0) = 0$. Miten pitkän ajan kuluttua massapiste palaa lähtökohtaansa, jos $R = 6.36 \cdot 10^6$ m ja $x''(0) = -9.8$ m/s^2? Mikä on probleeman fysikaalinen sisältö?

86. [HRIV/8/1] Määritä seuraavien käyräparvien kohtisuorat leikkaajat:

$$\text{a) } y = (x+C)^3, \quad \text{b) } x^3 - 3xy^2 = C, \quad \text{c) } y = Cx\exp(x^2+y^2), \quad \text{d) } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = C,$$
$$\text{e) } \frac{x^2}{C^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{f) } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{C^2} = 1, \qquad \text{g) } y = Cx^b.$$

Näissä C on parven parametri, muut kirjainsymbolit vakioita. Piirrä kuviot.

87. [HRIV/8/3] Määritä sellainen käyrä, joka leikkaa kohtisuorasti sekä parvea $y = \sqrt{x-C}$ että parvea $y = e^{2x} + C$.

88. [HRIV/18/4] Etsi integro-differentiaaliyhtälön

$$x^2y'(x) + 2\int_x^0 y(t)\,dt = 0$$

kaikki ratkaisut johtamalla ensin differentiaaliyhtälö funktiolle y.

89. [HRIV/20/3c] Olkoot x ja y muuttujan t funktioita. Ratkaise alkuarvoprobleema

$$\begin{cases} x' = y + t^2 \\ y' = x - t^3 \end{cases}, \qquad x(0) = y(0) = 0.$$

90. [SD/10/3] Etsi differentiaaliyhtälöryhmän $x' + y = y' + z = z' + x = 0$ yleinen ratkaisu sekä alkuehdon $x(0) = y(0) = z(0) = 1$ toteuttava yksityisratkaisu.

91. [HRIV/22/7a] Olkoot $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ ja $u(t)$ tuntemattomia funktioita. Etsi differentiaaliyhtälöryhmän

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = z \\ z' = u \\ u' = x \end{cases}$$

yleinen ratkaisu.

92. [SD/10/4] Olkoot $x(t)$, $y(t)$ ja $z(t)$ tuntemattomat funktiot. Ratkaise differentiaaliyhtälöryhmä

$$\begin{cases} x' = y - z \\ y' = z - 2x \\ z' = 2x - y \end{cases}$$

alkuehdolla $x(0) = 1,\ y(0) = 2,\ z(0) = 3$.

93. [HRIV/22/8b] Olkoot $x(t)$ ja $y(t)$ tuntemattomat funktiot, $m \in \mathbb{R}$. Etsi yleinen ratkaisu differentiaaliyhtälöryhmälle

$$\begin{cases} x'' + 2m^2 y = 0 \\ y'' - 2m^2 x = 0 \end{cases}.$$

94. [SD/10/7] Heiluri, joka muodostuu painottoman varren (pituus L) päässä olevasta massasta m, saatetaan heilahtelemaan pystysuorassa tasossa. Heilahduskulma olkoon ϑ. Muodosta Newtonin lakien mukainen liikeyhtälö, johda vastaava normaaliryhmä ja totea se autonomiseksi. Muodosta normaaliryhmästä faasitasokäyrien differentiaaliyhtälö ja ratkaise se. Piirrä ratkaisukäyrien kuvaajia.

95. [SD/10/9] Ratkaise ominaisarvoteoriaa käyttäen differentiaaliyhtälöryhmä

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 3z - y \\ \dfrac{dz}{dx} = z + y \end{cases}.$$

96. [SD/11/1] Ratkaise seuraavat lineaariset differenssiyhtälöt (alkuarvoprobleemat) sijoituksella $a_n = z^n$:

a) $2a_{n+2} + a_{n+1} - a_n = 0, \quad a_0 = 3,\ a_1 = 0;$

b) $a_{n+2} = 2(a_{n+1} - a_n), \quad a_0 = a_1 = 1;$

c) $a_{n+3} + a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad a_0 = 2,\ a_1 = -2,\ a_2 = 6.$

Generoi myös rekursiivisesti yhtälöiden määrittelemiä lukujonoja ja vertaa tuloksia alkuarvoprobleeman ratkaisuun.

97. [SD/12/10] Ratkaise numeerisesti Eulerin menetelmällä alkuarvoprobleema a) $y' = y$, $y(0) = 1$, b) $y' = -y$, $y(0) = 1$. Valitse askelpituudeksi $h = 0.2$ ja tarkasteluväliksi $[0, 5]$. Vertaa tulosta tarkkaan ratkaisuun. Millä tavalla a- ja b-kohta ovat tarkkuuden suhteen erilaisia?

98. [SD/12/14] Kirjoita differentiaaliyhtälöä $y'' + xy' + y = 0$ vastaava ensimmäisen kertaluvun normaaliryhmä. Muodosta tämän perusteella Eulerin menetelmän mukaiset numeeriset ratkaisukaavat, kun alkuehdot ovat $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

99. [HRIV/3/5] Ratkaise numeerisesti Eulerin menetelmällä alkuarvoprobleema $y' = |y - 1|$, $y(0) = 0$. Laske $y(3)$. Käytä eri askelpituuksia. Muodosta myös yhtälön tarkka ratkaisu.

100. [SD/12/2] Etsi differentiaaliyhtälön $y'' - 2y' + y = 0$ yleinen ratkaisu origokeskisen potenssisarjan muodossa. Ratkaise differentiaaliyhtälö myös alkeisfunktioiden avulla. Muodosta ratkaisufunktion Maclaurinin sarja. Onko tämä sama kuin edellä saatu sarjaratkaisu?

101. [SD/12/5] Etsi origokeskinen sarjaratkaisu Airyn differentiaaliyhtälölle $y'' - xy = 0$.

102. [SD/12/20] Etsi approksimaatio alkuarvoprobleeman $y' = xy$, $y(0) = 1$ ratkaisulle Picardin – Lindelöfin menettelyllä. Valitse aloitusfunktioksi vakiofunktio $y_0(x) = 1$. Vertaa tulosta tarkan ratkaisun Maclaurinin polynomiin.

103. [SD/12/21] Laske Picardin – Lindelöfin menettelyllä approksimoivia polynomeja alkuarvoprobleeman $y' = x^2 - y^2$, $y(0) = 1$ ratkaisulle.

104. [VA/1/2] Todista suoraan raja-arvon määritelmään perustuen, että funktio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x + y,\, xy)$, on jatkuva pisteessä $(1, 1)$.

105. [VA/1/3] Millä muuttujien arvoilla seuraavat kahden muuttujan reaaliarvoiset funktiot $f(x, y)$ ovat määriteltyjä? Piirrä näiden kuvaajat.

$$\text{a) } x^2 - y^2, \quad \text{b) } x^y - y^x, \quad \text{c) } \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad \text{d) } \frac{xy}{x^2 - y^2}.$$

106. [VA/1/9] Tarkastellaan kuvausta $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

Piirrä lähtöjoukon suorakulmainen koordinaattiruudusto ja tämän kuva maalijoukossa. Onko kuvaus bijektio?

107. [VA/1/13] Koko avaruuden täyttävä neste kiertää z-akselin ympäri siten, että nestehiukkasen kulmanopeus on suoraan verrannollinen sen z-koordinaatin neliöön. Muodosta vektorimuuttujan vektoriarvoinen funktio, joka esittää nestehiukkasen nopeusvektoria sen paikan funktiona. (Tällaista funktiota kutsutaan *vektorikentäksi*; jokaiseen avaruuden pisteeseen tai oikeammin sen paikkavektoriin $\mathbf{r}$ liittyy kentän vektori $\mathbf{f}(\mathbf{r})$).

108. [VA/1/15] Tason *käänteissäteinen muunnos* (*inversio*) on kuvaus $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Pisteen $P \mathrel{\widehat{=}} (x, y)$ kuvaksi asetetaan piste $P' \mathrel{\widehat{=}} (x', y')$ siten, että P ja P' sijaitsevat samalla origosta O alkavalla säteellä ja etäisyyksille pätee $|OP|\,|OP'| = 1$. Johda kuvauksen komponenttifunktioiden lausekkeet.

109. [HRV/2/6] Olkoon geometrisessa avaruudessa E^3 määriteltynä reaaliarvoinen funktio

$$f(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{r}}, \quad \mathbf{b} \cdot \mathbf{r} \neq 0,$$

missä $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ ovat lineaarisesti riippumattomia vakiovektoreita. Tutki, onko olemassa raja-arvoa

$$\lim_{\mathbf{r} \to \mathbf{o}} f(\mathbf{r}).$$

110. [HRV/3/1] Funktio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ määritellään asettamalla $f(0,0) = a$ ja origon ulkopuolella funktiolla on lauseke

$$\text{a)}\ \frac{x^2y}{x^4+y^2},\quad \text{b)}\ \frac{xy(x^3+y)}{x^4+y^2},\quad \text{c)}\ \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \text{d)}\ \frac{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}-1}{x^2+y^2},\quad \text{e)}\ \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2}.$$

Voidaanko a valita siten, että f on jatkuva origossa?

111. [VA/2/2] Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{kun } \ x^2 < y < 2x^2, \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Osoita, että funktiolla on sama raja-arvo origossa lähestyttäessä mitä tahansa suoraa pitkin, mutta siitä huolimatta varsinainen raja-arvo ei ole olemassa. Missä pisteissä funktio ei ole jatkuva?

112. [HRV/8/3] Olkoon $f(x,y) = x^3y^2 + x^4 \sin y + \cos(xy)$. Laske osittaisderivaatat f_{xxy}, f_{xyx}, f_{yxx} ja totea, että nämä ovat yhtä suuria.

113. [VA/2/3] Laske funktion $f(x,y) = x^y$ ensimmäisen ja toisen kertaluvun osittaisderivaatat, kun $x > 0,\ y \in \mathbb{R}$. Ovatko toisen kertaluvun sekaderivaatat yhtä suuria?

114. [HRV/8/4] Olkoot f ja g kahdesti jatkuvasti derivoituvia funktioita $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Määritä vakiot a ja k siten, että funktio $u(x,y) = xf(x+ay) + yg(x+ay)$ toteuttaa osittaisdifferentiaaliyhtälön

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$$

115. [HRV/6/2] Osoita suoraan differentioituvuuden määritelmän perusteella, että funktio $f(x,y) = x \cos y$ on differentioituva koko tasossa $\mathbb{R}^2$.

116. [VA/2/7] Laske funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^4 + 2y^2 + 4xy$ differentiaali pisteessä $(-3,2)$. Mikä on tämän yhteys pinnan $z = f(x,y)$ tangenttitasoon?

117. [HRV/7/2] Mihin suuntaan funktio $f(x,y,z) = x^3 - 2xy^2z + 5yz^4$ kasvaa nopeimmin pisteessä $(2,-2,1)$? Mikä on funktion derivaatta tähän suuntaan? Piirrä funktion kuvaaja, kun se rajoitetaan tämän suuntaiselle ko. pisteen kautta kulkevalle suoralle.

118. [VA/2/9] Olkoon $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = xy^2 + yz^3$. Tutki, mihin suuntaan pisteestä $(3,-1,4)$ on edettävä, jotta a) funktio kasvaisi mahdollisimman nopeasti, b) funktio ei kasvaisi lainkaan. Mikä on funktion derivaatta nopeimman kasvun suuntaan?

119. [HRV/7/5] Mihin suuntiin funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}, \text{ kun } (x,y) \neq (0,0), \quad f(0,0) = 0,$$

origossa muodostettu suunnattu derivaatta on olemassa? Onko f differentioituva origossa?

120. [HRV/6/7] Graafisen esityksen perusteella on käyrän $y = f(x)$ ensimmäiselle ja toiselle derivaatalle saatu tarkastelukohdan ympäristössä arviot

$$2.995 < f'(x) < 3.005, \quad 1.99 < f''(x) < 2.01.$$

Määritä differentiaalia käyttäen likimääräiset virherajat käyrän kaarevuussäteelle kyseisessä kohdassa.

121. [HRV/6/9] Pystysuoran lipputangon varjo vaakasuoralla kentällä havaitaan kahtena ajankohtana. Tänä aikana varjo on kiertynyt kulman $21°30'$, auringon korkeuskulma vähentynyt arvosta $35°30'$ arvoon $29°0'$ ja varjon pää piirtänyt kaaren, jonka jänteen pituus on 784 cm. Mikä on tangon korkeus ja millä tarkkuudella se em. arvoista saadaan, kun kulmamittausten tarkkuus on $15'$ ja pituusmittauksen 2 cm?

122. [HRV/9/2] Laske ketjusääntöä käyttäen $\dfrac{\partial w}{\partial s}$ ja $\dfrac{\partial w}{\partial t}$, kun

$$\begin{aligned}
&\text{a) } w = x\ln(x^2+y^2), \quad x = s+t,\ y = s-t, \\
&\text{b) } w = e^{x+2y}\sin(2x-y), \quad x = s^2+2t^2,\ y = 2s^2-t^2.
\end{aligned}$$

123. [VA/2/13] Kappale kulkee pinnalla $F(x,y,z) = 0$ siten, että sen x- ja y-koordinaattien aikariippuvuus tunnetaan: $x = x(t)$, $y = y(t)$. Lausu kappaleen nopeusvektori funktioiden F, x ja y derivaattojen avulla. Sovella tulosta tapaukseen, missä pinta on yksikkösäteinen pallo ja x- ja y-koordinaatit kasvavat aikaan verrannollisesti: $x(t) = y(t) = t$. Liike alkaa hetkellä $t = 0$. Hahmottele nopeusvektorin itseisarvon kuvaaja.

124. [VA/2/17] Suure S voidaan esittää sekä suorakulmaisten että napakoordinaattien avulla: $S = f(x,y) = F(r,\varphi)$. Se toteuttaa suorakulmaisten koordinaattien suhteen osittaisdifferentiaaliyhtälön

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 = 1.$$

Millaisen napakoordinaattien suhteen muodostetun osittaisdifferentiaaliyhtälön se toteuttaa?

125. [VA/2/18] Muunna osittaisdifferentiaaliyhtälö

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + y^2$$

napakoordinaatteihin. Merkitse tällöin $u(x,y) = U(r,\varphi)$. Millaisia ratkaisuja yhtälöllä on? Oletetaan lisäksi, että ratkaisufunktio saa xy-tason yksikköympyrällä arvot $u(x,y) = x$. Onko u tällöin jatkuva origossa?

126. [HRV/17/2] Laske Taylorin polynomit seuraavissa tapauksissa:

$$\begin{aligned}
&\text{a) } f(x,y) = 2x^4 - 5y^3 + 2xy^2,\ \text{keskus} = (0,0),\ \text{aste} = 3; \\
&\text{b) } f(x,y) = y^2\ln x,\ \text{keskus} = (1,0),\ \text{aste} = 4; \\
&\text{c) } f(x,y) = \sqrt{x^3y},\ \text{keskus} = (1,3),\ \text{aste} = 4.
\end{aligned}$$

127. [HRV/17/5] Yhtälö $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ määrittelee eräässä pisteen $(1,1,1)$ ympäristössä funktion $z = f(x,y)$. Muodosta tämän funktion toisen asteen Taylorin polynomi pisteessä $(1,1)$.

128. [HRV/18/3] Luokittele seuraavat neliömuodot:

$$\text{a) } 2x^2 + 2y^2 + z^2 - 4xy + 6yz, \quad \text{b) } x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2yz + 2zx.$$

129. [HRV/19/1] Etsi seuraaville funktioille f ne pisteet, joissa $\operatorname{grad} f = O$, ja tutki lokaalin ääriarvon esiintymistä:

a) $y^4 + x^2 - 2xy$, b) $x^3 + xy + y^2 - 3x - 9y$, c) $x^4 + y^4 + 4xy - 2y^2$,

d) $(x + 2y - 2)(x - 2)(y - 1)$, e) $\dfrac{xy}{8} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}$, f) $(x + y)e^{-x^2-y^2}$.

130. [VA/3/8] Tutki funktion $f(x, y) = x^3 + 3axy^2 - 3x^2 - 3y^2 + 4$ suhteellisia ääriarvokohtia vakion a eri arvoilla. Määritä ääriarvojen laatu neliömuotojen teoriaa käyttäen. Onnistutaanko tällöin kaikissa tapauksissa?

131. [HRV/19/4a] Tutki neliömuotoja käyttäen, onko origo suhteellinen ääriarvo funktiolle

$$f(x, y, z) = e^{x^2} + e^{y^2} + e^{z^2} - xy.$$

Jos on, onko kyseessä maksimi vai minimi?

132. [HRIV/12/1] Osoita differentiaaliyhtälöt

a) $3x^2 + 6xy^2 + (6x^2y + 4y^3)y' = 0$, b) $e^{-y} + (1 - xe^{-y})y' = 0$,
c) $2x\cos^2 y + (2y - x^2\sin 2y)y' = 0$

eksakteiksi ja ratkaise ne (muodosta yleiset integraalit). Piirrä suuntakentät ja ratkaisukäyriä Matlabin `diffeq`-paketilla.

133. [HRIV/12/4] Differentiaaliyhtälöllä

$$(2xy - y^2 - y)dx + (2xy - x^2 - x)dy = 0$$

on muotoa $F(x + y)$ oleva integroiva tekijä. Ratkaise yhtälö.

134. [HRIV/12/2] Tarkastellaan differentiaaliyhtälöä

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

Osoita, että a) jos $(P_y - Q_x)/Q$ on pelkästään muuttujan x funktio, niin yhtälöllä on muotoa $F(x)$ oleva integroiva tekijä, b) jos $(P_y - Q_x)/P$ on pelkästään muuttujan y funktio, niin yhtälöllä on muotoa $F(y)$ oleva integroiva tekijä.

135. [VA/4/1] Olkoot $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ ja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ differentioituvia funktioita. Todista differentiaalikehitelmää käyttäen, että myös summa $f + g$ on differentioituva ja

$$d(f + g) = df + dg.$$

136. [HRV/6/10] Etsi vektorimuuttujan vektoriarvoisen funktion

$$f(x, y, z) = (x^2 + yz,\ 2ze^x,\ x\ln y)$$

Jacobi'n matriisi. Laske funktion differentiaali pisteessä $(0, 1, -2)$, kun $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.1$.

137. [VA/4/3] Funktiot $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ määritellään seuraavasti:

$$f(x) = \underset{n\times n}{A}\, x + \underset{n\times 1}{b}, \qquad g(x) = x^{\mathrm{T}} \underset{n\times n}{A}\, x.$$

Määritä funktioiden derivaatat, so. Jacobi'n matriisit.

138. [VA/4/4] *Käänteissäteinen muunnos* (eli *inversiokuvaus*) on kuvaus $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$, missä pisteen P kuvaksi asetetaan piste P', joka sijaitsee samalla origosta lähtevällä säteellä kuin P siten, että pisteiden origosta mitattujen etäisyyksien tulo on $= 1$. Muodosta kuvauksen komponenttifunktiot sekä laske Jacobi'n matriisi ja tämän determinantti.

139. [VA/4/5] Käyrät c_1 ja c_2 leikkaavat toisensa pisteessä P kulmassa, jonka suuruus on α. Käyrät kuvataan käänteissäteisellä muunnoksella, jolloin saadaan käyrät d_1 ja d_2; nämä leikkaavat toisensa pisteen P kuvapisteessä P'. Osoita, että myös kuvakäyrät leikkaavat toisensa kulmassa α.

140. [HRV/9/10] Olkoot avaruuden E^3 vektorit $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ lineaarisesti riippumattomia. Määritellään reaaliarvoinen funktio f asettamalla

$$f(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}}, \quad \mathbf{b}\cdot\mathbf{r} \neq 0.$$

Määritä ∇f ja osoita, että funktion f derivaatta vektorin $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ suuntaan on $= 0$.

141. [VA/4/6] Millainen kaksiulotteinen Newtonin menetelmä saadaan differentiaalin avulla yhtälöryhmän

$$\begin{cases} x^3y^5 = 1, \\ x^7 + y^7 = 5 \end{cases}$$

ratkaisemiseen? Esitä iteraatiokaava matriisimuodossa.

142. [VA/4/7] Tutki, missä pisteissä Cartesiuksen lehden $x^3 + y^3 = 3xy$ tangentin suuntakulma johonkin koordinaattiakseliin nähden on 45°. Muodosta tarvittava yhtälöryhmä ja ratkaise se kaksiulotteisella Newtonin iteraatiolla.

143. [VA/6/1] Määritä jokin piste, jonka ympäristössä funktiolla $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = (y\sin x,\ x+y+1)$$

a) on lokaali käänteisfunktio, b) ei ole. Piirrä Matlabilla näiden pisteiden ympäristöön asetetun neliöruudukon kuva.

144. [HRV/11/1] Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = (e^x\cos y,\ e^x\sin y).$$

Määritä suorakulmion $S = \{\,(x,y) \mid r_1 \le x \le r_2,\ 0 \le y \le 2\pi\,\}$ kuva $f(S)$ ja tutki, onko kuvaus $f : S \to f(S)$ injektio. Määritä suurin injektiivisesti kuvautuva origon ympyräympäristö.

145. [HRV/11/5] Kuvaus $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = (u,v) = (e^x\cos y,\ e^x\sin y),$$

kuvaa pisteen $P \mathrel{\hat=} (1,\pi/6)$ erään ympäristön pisteen $Q \mathrel{\hat=} (e\sqrt{3}/2, e/2)$ eräälle ympäristölle bijektiivisesti, jolloin on olemassa lokaali käänteiskuvaus $x = g_1(u,v)$, $y = g_2(u,v)$. Laske funktion $h(u,v) = g_1(u,v)g_2(u,v)$ osittaisderivaatat $\dfrac{\partial h}{\partial u}$ ja $\dfrac{\partial h}{\partial v}$ pisteessä Q.

146. [HRV/15/1] Osoita, että yhtälö $x^6 + 2y^4 - 3x^2y = 0$ eräässä pisteen $(1,1)$ ympäristössä määrittelee funktion $y = f(x)$. Määritä funktion kuvaajan tangentin yhtälö kyseisessä pisteessä.

147. [HRV/15/7] Oletetaan, että yhtälö $x = f(y, z)$ määrittelee funktion $z = g(x, y)$ ainakin jossakin tarkastelupisteen (x, y, z) ympäristössä. Lausu derivaatat g_x, g_y ja g_{xy} funktion f derivaattojen avulla. Oletetaan, että funktio f on riittävän monta kertaa differentioituva.

148. [HRV/15/8] Osoita, että yhtälö $x = z + y \sin z$ eräässä origon ympäristössä määrittelee funktion $z = g(x, y)$. Laske $g_{xy}(0, 0)$.

149. [VA/6/8] Tutki sopivaa Jacobi'n determinanttia käyttäen, voidaanko yhtälöistä

$$x + y + z = 1 \quad \text{ja} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

ratkaista funktiot $y = f(x)$ ja $z = g(x)$ sopivassa pisteen $(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5}),\ \frac{1}{4}(1 - \sqrt{5}))$ ympäristössä. Mikä on probleeman geometrinen sisältö?

150. [HRV/15/13] Osoita, että yhtälöt

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{ja} \quad \frac{(x - \frac{a}{2})^2}{(\frac{a}{2})^2} + \frac{y^2}{(\frac{b}{2})^2} = 1$$

$(a,\ b,\ c > 0)$ määrittävät käyrän pisteen $(\frac{a}{2},\ \frac{b}{2},\ \frac{c}{\sqrt{2}})$ ympäristössä. Laske tähän pisteeseen asetetun käyrän tangentin ja z-akselin välisen kulman kosini.

151. [VA/6/11] Totea edellisen tehtävän yhtälön

$$\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = -1$$

voimassaolo tapauksessa $F(x, y, z) = x^3 y^2 z - 1$, ts. muodosta funktiot x, y, z, laske näistä tarvittavat osittaisderivaatat ja niiden tulo.

152. [HRV/21/1] Etsi seuraavien funktioiden maksimi ja minimi annetussa joukossa:

a) $xy + x - y$, $\quad \{\, (x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1,\ x + y + 1 \ge 0,\ x - y - 1 \le 0 \,\}$;
b) $x^2 - 2y^2 - xy - x$, $\quad \{\, (x, y) \mid x \ge -1,\ y \ge -1,\ x + y \le 1 \,\}$;
c) $3 + x - x^2 - y^2$, $\quad \{\, (x, y) \mid 2x^2 + y^2 \le 1 \,\}$;
d) $y^2 - 2x^2$, $\quad \{\, (x, y) \mid x^2 - y \le 1,\ x + y \le 1 \,\}$;
e) $xy(a - x - y)$, $\quad \{\, (x, y) \mid |x| \le a,\ |y| \le a \,\}$;
f) $x^3 + y^3$, $\quad \{\, (x, y) \mid 0 \le xy \le 1,\ x^2 + y^2 \le 4 \,\}$;
g) $\sin x + \sin y - \sin(x + y)$, $\quad \{\, (x, y) \mid 0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \pi \,\}$;
h) $(x + y)e^y$, $\quad \{\, (x, y) \mid |x| \le 1,\ |y| \le 1 \,\}$;
i) $x \sin z + y \cos z$, $\quad \{\, (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 1 \,\}$.

153. [VA/3/10] Määritä funktion

$$f(x, y) = xe^{-x^2 - y^2}$$

suuurin ja pienin arvo ympyrässä $x^2 + y^2 \le R^2$.

154. [VA/3/11] Paraboloidisegmentistä $x^2 + 4y^2 \le z \le 1$ sahataan suorakulmainen särmiö, jonka sivutahkot ovat koordinaattitasojen suuntaiset. Määritä tämän suurin mahdollinen tilavuus. Mitkä ovat tällöin särmiön mitat?

155. [HRV/21/3] Määritä funktion

$$f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

suurin ja pienin arvo joukossa

$$\text{a) } \{\,(x,y) \mid 0 < x^2+y^2 \le 1\,\}, \quad \text{b) } \{\,(x,y) \mid x^2+y^2 \ge 1\,\}, \quad \text{c) } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},$$

mikäli nämä ovat olemassa.

156. [HRV/20/2b] Etsi origon lyhin etäisyys hyperbelistä $x^2+8xy+7y^2 = 45$ käyttäen Lagrangen kertoimia.

157. [HRV/20/4] Olkoot α, β ja γ kolmion kulmat. Etsi suurin arvo lausekkeelle $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$.

158. [HRV/20/5] Määritä funktion $f(x,y,z) = x^3+y^3+z^3$ suurin ja pienin arvo tason $x+y+z = 3$ ja pallon $x^2+y^2+z^2 = 27$ leikkausympyrällä.

159. [HRV/20/6] Etsi lausekkeen $\sum_{k=1}^n x_k^p$ ääriarvot, kun side-ehtona on $\sum_{k=1}^n x_k = a$.

160. [HRV/12/3a] Määritä pinnan $\mathbf{r}(u,v) = u(1+v)\mathbf{i} + u^2(1-v)\mathbf{j} + u^3v\mathbf{k}$ pisteeseen $(1,1,0)$ asetetun tangenttitason yhtälö. Piirrä pinta.

161. [VA/5/2] Tutki, millaista pintaa esittää yhtälö

$$\mathbf{r}(u,v) = (R + r\cos u)\cos v\,\mathbf{i} + (R + r\cos u)\sin v\,\mathbf{j} + r\sin u\,\mathbf{k}, \qquad u, v \in [0, 2\pi],$$

tarkastelemalla käyriä u = vakio, v = vakio. Laske parametriarvoja $u = \frac{\pi}{4}$, $v = \frac{\pi}{3}$ vastaava pinnan piste ja tähän asetettu normaalivektori. Oletetaan $R > r > 0$. Piirrä pinta.

162. [HRV/12/5] Määritä pisteen a) $(2,3,6)$, b) $(3,3,1)$ kautta kulkeva pinnan $z = xy$ normaali.

163. [HRV/15/10] Olkoon funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivoituva. Määritä pinnan $x - 2y + 3z + f(x - y + 2z) = 0$ kaikkien tangenttitasojen suuntainen vektori.

164. [VA/5/5] Pinnat $y^2+z^2 = 1$ ja $\frac{1}{4}x^2+y^2-z^2 = 1$ leikkaavat toisensa pitkin erästä käyrää. Laske käyrän tangenttivektori pisteessä, jonka x-koordinaatti on $= 1$ ja muut koordinaatit positiivisia.

165. [HRVI/5/2] Laske

$$\iint_A f_{xy}(x,y)\,dxdy,$$

kun A on suorakulmio $[a,b] \times [c,d]$.

166. [HRVI/5/4] Laske $\int_A xy\,da$, kun A on a) kolmio, jonka kärjet ovat $(0,0)$, $(1,1)$, $(1,2)$; b) kuvio, jonka määrittelevät ehdot $x \in [0,1]$, $0 \le y \le \sqrt{x}$; c) segmentti, jota rajoittavat suora $y = 2(x-p)$ ja paraabeli $y^2 = 2px$.

167. [HRVI/11/2] Olkoon $V = \{\,(x,y,z) \mid x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ x+y+z \le 1\,\}$. Laske a) $\int_V (1-x-y)^5\,dv$, b) $\int_V xyz^4\,dv$.

168. [VA/7/3] Laske sopivan muuttujanvaihdon avulla integraali

$$\iint_A (2x+3y)^2(x-5y)^2\,dxdy, \quad \text{missä } A = \{\,(x,y) \mid |2x+3y| \le 4,\ |x-5y| \le 3\,\}.$$

169. [HRVI/5/5] Laske käyrien $y^3 = ax^2$, $y^3 = bx^2$, $x^4 = cy^3$, $x^4 = dy^3$ $(0 < a < b,\ 0 < c < d)$ ensimmäisessä neljänneksessä rajoittaman alueen pinta-ala. Valitse uusiksi muuttujiksi u ja v, jotka määräytyvät yhtälöistä $y^3 = ux^2$, $x^4 = vy^3$.

170. [HRVI/7/1] Laske sen kappaleen tilavuus, jota rajoittavat xy-tason yläpuolella pinnat

$$\begin{aligned}&\text{a) } x^2 + y^2 = a^2,\ x^2 + y^2 = az,\ z = 0 \quad (a > 0);\\ &\text{b) } z = x^2 - y^2,\ x^2 + y^2 = 1,\ z = 0.\end{aligned}$$

171. [HRVI/13/7] Laske $\int_V xyz\,dv$, kun V on pallon oktantti

$$\{\,(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0\,\}.$$

172. [HRVI/13/6] Laske sekä pallon $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ että kartion $\sqrt{3}z = \sqrt{x^2 + y^2}$ sisään jäävän avaruuden osan tilavuus avaruusintegraalina siirtymällä a) lieriö-, b) pallokoordinaatistoon.

173. [HRVI/13/13] Laske pallokoordinaateissa integraali

$$f(t) = \int_B \frac{dv}{\sqrt{r^2 - 2tr\cos\vartheta + t^2}}, \quad t > 0,$$

missä B on origokeskinen R-säteinen pallo. Piirrä funktion f kuvaaja.

174. [HRVI/2/3] Laske käyräintegraali

$$\oint_c (y - x)\,dx + xy\,dy,$$

kun c on positiiviseen suuntaan kierrettynä a) ympyrä $x^2 + y^2 = 1$, b) sen neliön piiri, jonka kärjet ovat $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ ja $(0, 1)$, c) käyrä, jonka muodostavat pisteitä $(0, 0)$ ja $(\pi, 0)$ yhdistävät jana ja kaari $y = \sin x$.

175. [HRVI/2/4] Laske käyräintegraali

$$\oint_c (\sin y + x^4 y)dx + (xy^4 + x\cos y + x)dy,$$

missä c on tason yksikköympyrä positiiviseen suuntaan kierrettynä.

176. [HRVI/2/12] Olkoon $\mathbf{u}(x, y, z) = x^3\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Laske

$$\int_c \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r},$$

missä c on origosta pisteeseen $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ pitkin tason $y = z$ ja pyörähdysparaboloidin $z = x^2 + y^2$ leikkauskäyrää suuntautuva tie.

177. [HRVI/2/13] Olkoon $\mathbf{u}(x, y, z) = xyz\mathbf{i} + y^2\mathbf{k}$. Laske

$$\int_c \mathbf{u} \times d\mathbf{r},$$

missä c on origosta pisteeseen $(2,2,4)$ pitkin tason $x=y$ ja parabolisen lieriön $z=x^2$ leikkauskäyrää suuntautuva tie.

178. [HRVI/9/1] Laske sen pinnan ala, jonka lieriö $x^2+y^2=R^2$ leikkaa a) kartiosta $z=\sqrt{x^2+y^2}$, b) elliptisestä paraboloidista $z=2-\frac{1}{2}(x^2+y^2)$.

179. [HRVI/9/3] Pinnanpala on annettu parametriesityksen avulla: $x=8u^2$, $y=v^2$, $z=4uv$, $u\in[0,1]$, $v\in[0,3]$. Laske pinnanpalan ala.

180. [HRVI/5/12] Määritä sen tasokuvion keskiö, jota rajoittavat x-akseli ja sykloidin kaari

$$\mathbf{r}(t)=a(t-\sin t)\mathbf{i}+a(1-\cos t)\mathbf{j},\quad t\in[0,2\pi].$$

181. [HRVI/11/6] Ympyrän $y^2+z^2=R^2$, $x=a$ jokaisesta pisteetä asetetaan normaali z-akselille. Nämä muodostavat pinnan, jota kutsutaan *konoidiksi*. Laske konoidin ja em. ympyrän tason rajoittaman kappaleen tilavuus ja keskiö.

182. [VA/8/4] Lieriön muotoista kappaletta rajoittavat pinnat $y^2+z^2=1$, $x=0$ ja $x=1$. Kappaleen tiheys on $\rho(x,y,z)=1+x^2$. Laske kokonaismassa, massakeskipiste ja hitausmomentti symmetria-akselin suhteen.

183. [HRVI/13/9b] Etsi puolipallon massakeskipiste, kun tiheys on suoraan verrannollinen etäisyyteen keskipisteestä.

184. [VA/8/5] Pallon kokonaismassa on m, säde R ja tiheys suoraan verrannollinen keskipisteestä laskettuun etäisyyteen (verrannollisuuskertoimena α): $\rho=\alpha r$. Laske pallon hitausmomentti J keskipisteen kautta kulkevan akselin suhteen. Laske myös hitaussäde r_0, so. esitä hitausmomentti muodossa $J=mr_0^2$.

185. [HRVI/2/15] Kirjoita kaavat napakoordinaatistossa annetun sileän kaaren $r=r(\varphi)$, $\varphi\in[\alpha,\beta]$, keskiön x- ja y-koordinaateille.

186. [VA/10/5] Tason paraabelin kaarelle $x^2=2y$, $x\in[0,1]$, on levitetty massa, jonka tiheys (massa pituusyksikköä kohden) on $\rho(x,y)=x/\sqrt{1+2y}$. Laske kaaren massakeskipiste. Sijaitseeko tämä kaarella?

187. [VA/11/4] Laske puolipallon pinnan keskiö.

188. [VA/11/6] Kuinka monta prosenttia maapallon pinta-alasta sijaitsee kääntöpiirien välissä? Entä napa-alueilla, so. napapiirien sisäpuolella? Muodosta tarvittavat pintaintegraalit pallokoordinaateissa ja laske ne. Anna vastaus prosenttiyksikön tarkkuudella. (Kääntöpiirien leveysasteet ovat $\pm\epsilon$ ja napapiirien $\pm(90^\circ-\epsilon)$, missä $\epsilon=23.5^\circ$.)

189. [VA/9/1] Tutki, onko seuraava epäoleellinen integraali olemassa:

$$\iint_A \frac{1}{x-y}\,dxdy,\quad A=\{\,(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\,\}.$$

190. [HRVI/8/4] Olkoon $a>0$, $b>0$, $A=\{\,(x,y)\mid x\ge 0,\ y\ge 0\,\}$. Laske epäoleellinen integraali

$$\int_A e^{-(ax+by)^2}\,da$$

sijoituksella $u = ax + by,\ v = y/x$.

191. [HRVI/13/14] Laske arvo tai osoita hajaantuminen avaruusintegraalille

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{dxdydz}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}.$$

192. [HRVI/1/1] Muodosta seuraavat derivaatat laskematta integraalia ensin:

$$\text{a)}\ \frac{d}{dx}\int_1^x t\,dt, \qquad \text{b)}\ \frac{d}{dx}\int_0^{2x} \frac{\sin t}{t}\,dt, \qquad \text{c)}\ \frac{d}{dx}\int_2^{e^x} \frac{\ln t}{t}\,dt.$$

Tarkista tulos integroimalla ensin ja sen jälkeen derivoimalla, mikäli mahdollista.

193. [HRVI/1/5] Yhtälö

$$\int_0^y e^t\,dt + \int_0^x \sin t\,dt = 0$$

määrittelee funktion $y(x)$. Lausu implisiittistä derivointia käyttäen integraaleja laskematta $y'(x)$ muuttujien x ja y avulla.

194. [VA/9/5] Funktio f määritellään asettamalla

$$f(t) = \int_1^{1/t} \frac{\sin tx}{x}\,dx, \quad t > 0.$$

Laske $f'(t)$.

195. [VA/9/7] Olkoon

$$F(s) = \int_0^2 \frac{1}{s^2+x^2}\,dx, \qquad s > 0.$$

Laske integraali. Totea, että integraalimerkin alla derivoimisen edellytykset ovat voimassa ja laske derivaatta $F'(s)$ sekä integraalimerkin alla derivoimalla että suoraan laskemastasi lausekkeesta. Miten tulosta voidaan käyttää integraalin

$$\int_0^2 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$$

laskemiseen?

196. [VA/9/9] Määritä funktion

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,dt, \quad s > 0,$$

kaikkien kertalukujen derivaatat derivoimalla integraalimerkin alla. Miksi derivointi on sallittua? Johda derivaattojen avulla tulos

$$\int_0^\infty t^n e^{-t}\,dt = n!, \quad n \in \mathbb{N}.$$

197. [VA/9/10] *Gammafunktio* määritellään integraalilla

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt, \quad x > 0.$$

Mitä edellinen tehtävä kertoo gammafunktion arvoista, kun argumenttina on luonnollinen luku? Piirrä gammafunktion kuvaaja. Tarkastele tällöin myös negatiivisia muuttujan arvoja; funktio määritellään näillä arvoilla muulla tavoin kuin em. integraalilla.

198. [HRV/22/4] Laske $\nabla \cdot \mathbf{u}$, kun $\mathbf{u}$ on vektorikenttä

$$\begin{aligned}
&\text{a) } (z-y)\mathbf{i}+(x-z)\mathbf{j}+(y-x)\mathbf{k},\\
&\text{b) } e^{xyz}(\mathbf{i}+x\ln y\,\mathbf{j}+x^2z\,\mathbf{k}),\\
&\text{c) } (x^3z-2xyz)\mathbf{i}+(xy-3x^2yz)\mathbf{j}+(yz^2-xz)\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

199. [HRV/23/1] Laske $\nabla \times \mathbf{u}$, kun $\mathbf{u}$ on vektorikenttä

$$\begin{aligned}
&\text{a) } 2xyz\,\mathbf{i}+x^2z\,\mathbf{j}+x^2y\,\mathbf{k},\\
&\text{b) } e^{xyz}(\mathbf{i}+x\ln y\,\mathbf{j}+x^2z\,\mathbf{k}),\\
&\text{c) } (x^2+y^2+z^2)(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}).
\end{aligned}$$

200. [VA/12/2] Laske vektorikentän $\mathbf{u}(x,y,z) = z^2(x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j})+\mathbf{k}$ vuo kuution $|x| \le \frac{1}{2}$, $|y| \le \frac{1}{2}$, $|z| \le \frac{1}{2}$ pinnan läpi. Laske myös kentän divergenssi ja roottori.

201. [HRV/24/5] Sievennä $\mathbf{r}\cdot\nabla[\nabla\cdot(r^p\mathbf{r})]$.

202. [HRV/24/10] Olkoon $\mathbf{c}$ vakiovektori. Osoita vektoreita komponenteittain kirjoittamatta, että

$$\nabla\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{c}}{r^3} = \nabla\times\frac{\mathbf{r}\times\mathbf{c}}{r^3}.$$

203. [HRV/24/3] Osoita: a) $\nabla\cdot\mathbf{r}^0 = \dfrac{2}{r}$, b) $\nabla\times\mathbf{r}^0 = \mathbf{o}$.

204. [HRV/25/4] Yhtälöt

$$\begin{cases} x = uv\cos w,\\ y = uv\sin w,\\ z = \frac{1}{2}(u^2-v^2)\end{cases}$$

määrittävät käyräviivaiset koordinaatit u, v, w, ns. *parabolisen koordinaatiston*. Määritä koordinaatiston yksikkövektorit. Ovatko ne ortogonaalisia? Millaisia ovat koordinaattipinnat? Laske suure H.

205. [VA/12/7] Pisteen suorakulmaiset koordinaatit ovat $(3, 3\sqrt{3}, -5/2)$. Laske pisteen paraboliset koordinaatit ja lausu siihen liittyvät paraboliset yksikkövektorit $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$-kannassa.

206. [VA/12/8] Lausu Laplacen operaattori $\Delta = \nabla^2$ parabolisten koordinaatten avulla.

207. [VA/12/11] z-akselin ympäri kiertävän kentän vektorit ovat lieriökoordinaattien yksikkövektoreiden $\mathbf{e}_\varphi$ suuntaiset ja niiden itseisarvo on suoraan verrannollinen z-akselista lasketun etäisyyden neliöön. Laske kentän divergenssi ja roottori. Mitä nämä kertovat kentästä?

208. [VA/12/12] Virtauskentän kenttävektorit muodostuvat pallokoordinaattien yksikkövektoreista $\mathbf{e}_\theta$. Laske kentän divergenssi ja roottori. Kuvaile, millaisesta virtauksesta on kysymys. Missä sijaitsevat virtauksen lähteet?

209. [HRVI/6/2] Tarkista laskemalla Greenin lauseen voimassaolo, kun $\mathbf{u}(x,y) = (2xy - x^2)\mathbf{i} + (x + y^2)\mathbf{j}$ ja integroidaan käyrien $y = x^2$ ja $x = y^2$ rajaaman rajoitetun alueen yli.

210. [HRVI/6/3b] Laske a) suoraan käyräintegraalina, b) tasointegraaliksi muuntamalla

$$\oint_c y^2\,dx + (x+y)^2\,dy,$$

kun c on sen kolmion piiri positiiviseen suuntaan kierrettynä, jonka kärjet ovat $(a,0)$, (a,a) ja $(0,a)$; oletetaan $a > 0$.

211. [HRVI/12/1] Laske vektorikentän $\mathbf{u}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ vuo kuution

$$\{\,(x,y,z) \mid |x| \le 1,\ |y| \le 1,\ |z| \le 1\,\}$$

pinnan läpi a) pintaintegraalina, b) avaruusintegraalina.

212. [VA/13/2] Olkoon V koordinaattitasojen ja tason $x+y+z=1$ rajoittama alue, ∂V tämän reunapinta. Olkoon $\mathbf{u}(x,y,z) = 2xy\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$. Laske Gaussin lausetta käyttäen integraali

$$\oint_{\partial V} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}.$$

213. [HRVI/12/4] Vektorikenttä $\mathbf{u}$ olkoon rajoitetun alueen V säännöllisellä pinnalla kaikkialla kohtisuorassa pintaa vastaan. Osoita, että

$$\int_V \nabla \times \mathbf{u}\,dv = \mathbf{o}.$$

214. [VA/13/5] Laske avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektorikentän $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}/r^3$ vuo origokeskisen R-säteisen pallopinnan läpi. Laske kentän divergenssi. Voidaanko vuo laskea Gaussin lauseen avulla? Jos ei, niin miksi ei?

215. [VA/13/6] Osoita Gaussin lauseen avulla, että pintaintegraali

$$\oint_S \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r^4}\,\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}$$

on riippumaton siitä, millainen origoa ympäröivä (säännöllinen) pinta S on. (Tässä $\mathbf{r}$ on paikkavektori ja r sen itseisarvo.) Laske integraali valitsemalla pinnaksi S origokeskinen pallopinta.

216. [HRVI/10/4] Laske sekä suoraan käyräintegraalina että Stokesin lauseen avulla

$$\oint_c \left[yz\,\mathbf{i} + (xz^2 - 3y)\,\mathbf{j} - xy\,\mathbf{k}\right] \cdot d\mathbf{r},$$

missä c on käyrä $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} + \cos t\,\mathbf{k}$, $t \in [0, 2\pi]$.

217. [HRVI/10/3] Olkoon $\mathbf{u}(x,y,z) = yze^{xy}\,\mathbf{i} + xz(1+e^{xy})\,\mathbf{j} + e^{xy}\,\mathbf{k}$. Laske käyräintegraali

$$\oint_c \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r},$$

missä c on lieriön $x^2+y^2=4$ ja tason $2x+3y+z=5$ leikkauskäyrä kierrettynä origosta katsottaessa myötäpäivään.

218. [VA/13/8] Laske vektorikentän $\mathbf{u}(x,y,z) = x\,\mathbf{k}$ käyräintegraali $\int_c \mathbf{u}\cdot d\mathbf{r}$, kun c on pinnanpalan

$$\begin{cases} x = 8u^2, \\ y = v^2, & 0 \le u \le 1, \quad 0 \le v \le 3 \\ z = 4uv, \end{cases}$$

reuna a) suoraan käyräintegraalina, b) muuntamalla integraali ensin Stokesin lauseen avulla pintaintegraaliksi.

219. [HRVI/10/6] Osoita:

$$\int_B d\mathbf{S}\times\mathbf{r} = \tfrac{1}{2}\oint_{\delta B} r^2\,d\mathbf{r},$$

missä B on jokin säännöllinen pinnanpala ja δB sen reuna pinnan normaaliin nähden positiiviseen suuntaan kierrettynä.

220. [VA/13/10] Olkoon $u:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ harmoninen funktio ja $V\subset\mathbb{R}^3$ rajoitettu joukko, jonka reuna ∂V on säännöllinen. Osoita:

$$\oint_{\partial V} u\frac{\partial u}{\partial n}\,dS = \int_V |\nabla u|^2\,dv.$$

Tässä $\frac{\partial u}{\partial n}$ on funktion u derivaatta pinnan ∂V ulkonormaalin suuntaan.

221. [VA/14/2] Pallosymmetrinen vektorikenttä määritellään yhtälöillä

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}\mathbf{r}, & \text{kun } r \le R, \\ \dfrac{R^3}{3r^3}\mathbf{r}, & \text{kun } r \ge R. \end{cases}$$

Laske kentän lähde- ja pyörrekenttä sekä vuo origokeskisen r-säteisen pallopinnan läpi.

222. [VA/14/5] Muodosta vektorikentälle

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}\mathbf{r}, & \text{kun } r \le R, \\ \dfrac{R^3}{3r^3}\mathbf{r}, & \text{kun } r \ge R. \end{cases}$$

fysikaalinen skalaaripotentiaali, so. etsi funktio $V(\mathbf{r})$, jolle pätee $\mathbf{u} = -\nabla V$. Normeeraa V siten, että sen raja-arvo äärettömyydessä on $= 0$.

223. [VA/14/3] Tutki, onko kaksiulotteisella vektorikentällä $\mathbf{u}(x,y) = (y+2x)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ potentiaalia, ts. onko olemassa skalaarifunktiota $V(x,y)$, jonka gradienttina kenttä saadaan. Laske potentiaali myönteisessä tapauksessa. Laske käyräintegraali

$$\int_c \mathbf{u}\cdot d\mathbf{r},$$

missä c on pisteitä $(1,0)$ ja $(1,2)$ yhdistävä origon kautta kulkeva ympyrän kaari.

224. [VA/10/7] Osoita, että käyräintegraali

$$\int_{(-1,1,-1)}^{(1,2,3)} yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz$$

on alku- ja loppupistettä yhdistävästä tiestä riippumaton ja laske integraali. Voidaanko integraali kirjoittaa muotoon $\int \nabla g \cdot d\mathbf{r}$, kun funktio g valitaan sopivasti?

225. [HRVI/C/3] Osoita seuraavat vektorikentät $\mathbf{u}(x, y, z)$ koko avaruudessa pyörteettömiksi ja etsi niiden skalaaripotentiaalit:

a) $e^x \sin y\,\mathbf{i} + e^x \cos y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$,
b) $x\,\mathbf{i} + z \sin y\,\mathbf{j} - \cos y\,\mathbf{k}$,
c) $2xyz\,\mathbf{i} + x^2 z\,\mathbf{j} + x^2 y\,\mathbf{k}$,
d) $(x^2 + y^2 + z^2)(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}) = r^2\mathbf{r}$,
e) $-2xe^{-y}\,\mathbf{i} + (x^2 e^{-y} + \sin z)\,\mathbf{j} + y \cos z\,\mathbf{k}$.

226. [HRVI/C/7] Vektorikenttä

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \frac{x}{x^2 + y^2}\,\mathbf{i} + \frac{y}{x^2 + y^2}\,\mathbf{j}$$

on määritelty koko avaruudessa z-akselia lukuunottamatta. Osoita, että se on pyörteetön ja konservatiivinen. Etsi potentiaali.

227. [VA/14/6] Dipolin (kaksoislähteen) muodostaman vektorikentän potentiaali on

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3},$$

missä $\mathbf{p}$ on vakiovektori. Laske kenttä ja sen lähdekenttä.

228. [HRVI/C/14] Osoita seuraavat vektorikentät $\mathbf{u}(x, y, z)$ lähteettömiksi ja muodosta niiden vektoripotentiaalit:

a) $xy\,\mathbf{i} + \mathbf{j} - yz\,\mathbf{k}$,
b) $(z - y)\,\mathbf{i} + (x - z)\,\mathbf{j} + (y - x)\,\mathbf{k}$,
c) $x^2\,\mathbf{i} + (x^2 y - 2xy)\,\mathbf{j} - x^2 z\,\mathbf{k}$,
d) $(y + z)\,\mathbf{i} + \sin z\,\mathbf{j} + \cos x\,\mathbf{k}$.

229. [HRVI/C/16] Määritä ne funktiot $f(x)$, joilla kenttä $\mathbf{u} = f(x)\, r^n\, \mathbf{r}$ on lähteetön. Laske kentän vuo origoa ympäröivän umpinaisen pinnan läpi, kun $n = -3$ ja $f(x) = 1$ kaikilla x.

230. [VA/14/9] Osoita alueessa $G = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ määritelty vektorikenttä $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}/r^3$ lähteettömäksi ja laske sen vuo origokeskisen pallopinnan läpi. Osoita Stokesin lauseen avulla, että jos kentällä on vektoripotentiaali alueessa G, niin kentän vuot ylemmän ja alemman puolipallon läpi ovat itseisarvoltaan yhtä suuret mutta vastakkaismerkkiset. Mitä tästä voidaan päätellä vektoripotentiaalin suhteen?

VASTAUKSIA

1. $a^4 - 4a^2 - a + 4 = 0$; raja-arvo $a = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3\sqrt[3]{2}}\left(\sqrt[3]{79 - \sqrt{2241}} + \sqrt[3]{79 + \sqrt{2241}}\right) \approx 1.831177207208$.

2. a) Ei suppene, kasautumispisteet ± 1, $\pm i$; b) suppenee, raja-arvo $\pi/2$; c) ei suppene, ei kasautumispisteitä.

3. $s_{k+1} = s_k / \sqrt{2 + \sqrt{4 - s_k^2}}$; $s_2 = \sqrt{2}$.

7. $2s - a_1 - a_2$.

8. a) Väärä; b) väärä.

10. a) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b^k x^k / a^{k+1}$, $|x| < |a/b|$;
b) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a^k / (b^{k+1} x^{k+1})$, $|x| > |a/b|$.

11. Ohitus $\frac{10}{9}$ stadionin kohdalla.

12. a) Suppenee; b) suppenee; c) suppenee; d) hajaantuu.

13. a) Suppenee; b) suppenee; c) suppenee.

14. a) Suppenee; b) suppenee; c) suppenee.

15. Osoita sarja suppenevaksi suhdetestillä.

16. Sovella Cauchyn suppenemiskriteeriä.

18. a) Suppenee; b) hajaantuu; c) suppenee.

19. 40 miljardia termiä; 20 termiä.

24. a) Suppenee, kun $|x| \geq \sqrt{2}$; rajafunktio $f(x) = 0$, kun $|x| > \sqrt{2}$; $f(x) = 1$, kun $|x| = \sqrt{2}$;
b) suppenee, kun $|x| > 1$; rajafunktio $f(x) = 0$;
c) suppenee, kun $x \neq -1$; rajafunktio $f(x) = 0$, kun $|x| \neq 1$; $f(1) = \frac{1}{2}$.

25. a) $|x| > \sqrt{2}$; b) $|x| > 1$; c) $|x| \neq 1$.

26. Jono $\langle f_n \rangle$ suppenee tasaisesti, jono $\langle g_n \rangle$ ei; rajafunktiot $f(x) = 0$ $\forall x$ ja $g(x) = 0$, jos $x \neq 0$, $g(0) = 1$.

27. Valitse M_k = termin itseisarvon maksimi.

28. Leibnizin lausetta voidaan käyttää, Weierstrassin testiä ei.

33. Rajafunktio $f(x) = 0$ $\forall x$; ei päde.

34. $g(0)$.

36. Määritelty, kun $x \leq 0$; voidaan derivoida termeittäin, kun $x < 0$; integroida, kun $x \leq 0$.

40. $\ln \dfrac{1+x}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{2k+1} x^{2k+1}$, $R = 1$; voidaan laskea kaikkien lukujen logaritmit.

43. Funktion $\sin(z/2)$ potenssisarja; $\sin^2(z/2) = \frac{1}{2}(1 - \cos z)$.

44. $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k x^{4k+2}}{(2k+1)!(2k+1)}$; suppenee kaikilla x.

45. $c_k = [(-1)^k - 1]/(\pi k^2)$, jos $k \neq 0$; $c_0 = \pi/2$;
$a_k = 2[(-1)^k - 1]/(\pi k^2)$, jos $k \neq 0$; $a_0 = \pi$; $b_k = 0$.

48. $\pi^2/8$, $\pi^4/96$.

51. Jokainen x-akselin piste on ratkaisujen haarautumispiste.

52. $1/5^{3/2}$.

53. $y = xy' + 2y'^2$, $y = -\frac{1}{8}x^2$. Paraabeli on suoraparven verhokäyrä.

55. $F(x, (y_1, y_2)) = (y_2,\ -xy_2/y_1)$.

56. $x' = u$, $y' = v$, $u' = -ax/(x^2 + y^2)^{3/2}$, $v' = -ay/(x^2 + y^2)^{3/2}$, missä u ja v ovat nopeuden komponentit.

57. a) $y = e - 1 - e^{-x}$, kun $x \leq 0$ ja $y = e - 3 + e^x$, kun $x \geq 0$;
b) $y = 1 + \cos x$, kun $x \leq 0$ ja $y = 3 - \cos x$, kun $x \geq 0$;
c) $x = 1 - \frac{\pi}{4} + y \,\overline{\text{arc}}\tan y - \frac{1}{2}\ln[\frac{1}{2}(1 + y^2)]$;
d) $y = 1$; e) $y = \left(1 + 2\ln\dfrac{1 + e^x}{1 + e}\right)^{1/2}$; f) $y = e^{\overline{\text{arc}}\sin(\tan x - 1)}$.

58. a) $x + y = \tan(y + C)$; b) $y = -2x - 3 + \sqrt{2}\tan(\sqrt{2}x + C)$; c) $\tan\frac{x+y}{2} = x + C$.

59. $f(y/x) = Cx$.

61. $y = \ln(Ce^x - x)$.

62. $y(t) = \sqrt{kt + C}$, missä y on elintaso ja k verrannollisuuskerroin.

63. Noin 3100 g.

64. a) $y = \frac{1}{12}(x + C_1)^3 + C_2$; b) $y = \ln|C_1e^x - 1/(C_1e^x)| + C_2$, $y = \pm x + C$;
c) $y = C_1e^{-x}(x + 1) + C_2$; d) $y = (C_1x - C_1^2)e^{x/C_1+1} + C_2$;
e) $y^2 = C_1^2 + (x + C_2)^2/C_1^2$; f) $x + C_2 = \pm\frac{2}{3}(\sqrt{y} - 2C_1)\sqrt{\sqrt{y} + C_1}$;
g) $y = \ln(2C_1^2) + C_1x + C_2 - 2\ln|e^{C_1x+C_2} - 1|$, $y = \ln(2C_1^2) - 2\ln|\cos(C_1x + C_2)|$,
$y = 2\ln(\sqrt{2}/|x + C|)$;
h) $y = (1/C_1)\cosh(C_1x + C_2)$; i) $y = C_1/\cos^2(x + C_2)$; j) $C_1y + (1 + C_1^2)\ln|y - C_1| = x + C_2$.

65. a) $y = \pm\frac{1}{3}(C_1 - 2x)^{3/2} + C_2x + C_3$; b) $y = (x + C_1)\ln|x + C_1| + C_2x + C_3$;
c) $y = (1/C_1)\ln|C_1x + C_2| + C_3$, $y = C_2x + C_3$;
d) $y = C_1x^4 + (C_2 + C_3\ln|x|)x + C_4$; e) $y = C_1x^5 + C_2x^3 + C_3x^2 + C_4x + C_5$.

67. $y = k\cosh(x/k + C_1) + C_2$, missä k on verrannollisuuskerroin.

68. $f(x)y' - f'(x)y = f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$.

69. Ei.

71. $(x \sin x + \cos x)y'' - (x \cos x)y' + (\cos x)y = 0; \quad y = x + \cos x.$

72. $I(x) = Q(x) - \frac{1}{4}P(x)^2 - \frac{1}{2}P'(x).$

73. a) $y = \frac{1}{5}(4/x^2 + x^3)$; b) $y = 2e^{-\sin x} + \sin x - 1$;
c) $y = \frac{1}{2}(e^{x^2} - 1)$, kun $x \leq 0$, $y = \frac{1}{2}x^2$, kun $x \geq 0$.

74. $y = e^x - x - 1.$

75. a) $y = C_1(x+3) + C_2e^x(x^2 - 4x + 6)$; b) $y = C_1x + C_2 \ln x$;
c) $y = C_1(x^2+1) + C_2(x^2+x)$; d) $y = C_1 \sin x + C_2 \sin^2 x$;
e) $y = C_1 \cos^2 x + C_2(\tan x + \sin 2x)$; f) $y = e^x[C_1 + C_2(x^2 - 4x)]$.

76. a) $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x - (\cos x) \ln|\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})|$;
b) $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + \frac{1}{2}(x \sin x - x^2 \cos x)$.

77. a) $y = (Cxe^x - x - 1)/(Ce^x - 1)$;
b) $y = x^2 + 1 - e^{\frac{1}{3}x^3+2x} / \left(C + \int_0^x e^{\frac{1}{3}t^3+2t}\,dt\right)$;
c) $y = (C + 4x^3)/(Cx + x^4)$.

78. Alueessa $y \geq x+1$ ratkaisu on $y = Ce^x + x + 1$, missä $C \geq 0$;
alueessa $x - 1 < y < x + 1$ on $y = -e^x/C + x + 1$, jos $x \leq \ln C$, ja $y = Ce^{-x} + x - 1$, jos $x \geq \ln C$;
tässä on $C > 0$;
alueessa $y \leq x - 1$ on $y = Ce^{-x} + x - 1$, missä $C \leq 0$;
a) $y(1) = 2/e^2$; b) $y(1) = e^2/2 + 2$.

79. a) $y = e^{-2x}(C_1 \sin x + C_2 \cos x) + \frac{3}{5}x - \frac{22}{25}$; b) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-x} - 2x + 1$;
c) $y = C_1e^{6x} + C_2e^x + \frac{5}{74}\sin x + \frac{7}{74}\cos x$; d) $y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x - \frac{1}{5}\sin 3x$;
e) $y = e^{-x}(C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x + \frac{1}{4})$; f) $y = e^x(C_1 + C_2x + \frac{1}{2}x^2) - \frac{1}{2}\sin x$;
g) $y = e^{-2x}(C_1 + C_2x + \frac{1}{2}x^2) + \frac{3}{25}\sin x - \frac{4}{25}\cos x$;
h) $y = e^{2x}(C_1 - \frac{1}{16}x + \frac{1}{8}x^2) + C_2e^{-2x}$; i) $y = e^{3x}(C_1 + C_2x - \ln|x|)$.

81. $W = Ce^{-ax}.$

82. $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + e^{2x}(C_3 \sin 3x + C_4 \cos 3x) + \frac{1}{3}e^{2x} - 4x - 1.$

83. $y = [1 + \ln x + (\ln x)^2]x.$

84. a) $I = E_0/R + Ce^{-Rt/L}$;
b) $I = \dfrac{E_0}{L^2\omega^2 + R^2}(R \sin \omega t - L\omega \cos \omega t) + Ce^{-Rt/L}$.

85. $x(t) = R\cos(\sqrt{k/m}t)$; ajan $2\pi\sqrt{R/g} \approx 84.4$ min kuluttua.

86. a) $y = (-\frac{5}{9}x + C)^{3/5}$; b) $y^3 - 3yx^2 = C$; c) $2y^2 - 1 = C(2x^2+1)$; d) $b^2 \ln|y| = a^2 \ln(Cx)$;
e) $x^2 + y^2 = 2b^2 \ln(Cy)$ $(|y| < b)$; f) $x^2 + y^2 = 2a^2 \ln(Cx)$ $(|x| > a)$; g) $x^2 + by^2 = C$.

87. $y = \frac{1}{4}e^{-2x}.$

88. $y = Cx.$

89. $x = -2e^t + 2e^{-t} + t^3 + 4t$, $y = -2e^t - 2e^{-t} + 2t^2 + 4$.

91. $x = C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3\sin t + C_4\cos t$, $y = C_1e^t - C_2e^{-t} + C_3\cos t - C_4\sin t$,
$z = C_1e^t + C_2e^{-t} - C_3\sin t - C_4\cos t$, $u = C_1e^t - C_2e^{-t} - C_3\cos t + C_4\sin t$.

93. Jos $m \neq 0$, niin
$x = e^{mt}(C_1\sin mt + C_2\cos mt) + e^{-mt}(C_3\sin mt + C_4\cos mt)$,
$y = e^{mt}(-C_1\cos mt + C_2\sin mt) + e^{-mt}(C_3\cos mt - C_4\sin mt)$;
jos $m = 0$, niin $x = C_1 + C_2t$, $y = C_3 + C_4t$.

94. $\vartheta'' + (g/L)\sin\vartheta = 0$; $y_1' = y_2$, $y_2' = -(g/L)\sin y_1$;
$\dfrac{dy_1}{dy_2} = -\dfrac{Ly_2}{g\sin y_1}$; $y_2^2 = 2(g/L)\cos y_1 + 2C$.

96. a) $a_n = (-1)^n + 1/2^{n-1}$; b) $a_n = 2^{n/2}\cos(n\pi/4)$;
c) $a_n = 1 + (-1)^n(1+2n)$.

98. $y' = z$, $z' = -xz - y$;
$y_0 = 1$, $z_0 = 2$, $y_{n+1} = y_n + hz_n$, $z_{n+1} = z_n + h(-nhz_n - y_n)$.

101. $y = C_1y_1 + C_2y_2$, missä $y_1 = 1 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{180}x^6 + \ldots$, $y_2 = x + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{504}x^7 + \ldots$; suppenemissäde $R = \infty$.

103. $y_0(x) = 1$, $y_1(x) = 1 - x + \frac{1}{3}x^3$, $y_2(x) = 1 - x + x^2 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{1}{63}x^7$, etc.

106. Kuvaus ei ole injektio.

107. $\alpha z^2(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$, missä α on verrannollisuuskerroin.

109. Ei ole.

110. a) Ei voida; b) $a = 0$; c) $a = 0$; d) $a = \frac{1}{2}$; e) $a = 1$.

111. Piirrä kuvaaja funktion rajoittumasta mielivaltaiselle origon kautta kulkevalle suoralle; tutki tätä varten, missä pisteissä ko. suora leikkaa paraabelit $y = x^2$ ja $y = 2x^2$. Funktio on epäjatkuva näillä paraabeleilla.

112. Yhteinen lauseke $12xy + 12x^2\cos y - 2y\cos(xy) + xy^2\sin(xy)$.

118. a) $\mathbf{i} + 58\mathbf{j} - 48\mathbf{k}$; b) kohtisuoraan eo. suuntaa vastaan. Derivaatta nopeimman kasvun suuntaan $\sqrt{5669} \approx 75.29$.

120. $R \approx 5\sqrt{10} \pm 19\sqrt{10}/400 \approx 15.81 \pm 0.15$.

123. Nopeusvektori $\mathbf{i} + \mathbf{j} - (F_x x' + F_y y')/F_z\,\mathbf{k}$; sovelluksessa $\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2t/\sqrt{1-2t^2}\,\mathbf{k}$.

124. $(\frac{\partial S}{\partial r})^2 + \frac{1}{r^2}(\frac{\partial S}{\partial \varphi})^2 = 1$.

125. $u(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2) + x/\sqrt{x^2+y^2} - \frac{1}{2}$; ei ole jatkuva origossa.

126. a) $2xy^2 - 5y^3$; b) $(x-1)y^2 - \frac{1}{2}(x-1)^2y^2$;
c) $\sqrt{3} + \frac{3\sqrt{3}}{2}(x-1) + \frac{\sqrt{3}}{6}(y-3) + \frac{3\sqrt{3}}{8}(x-1)^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}(x-1)(y-3) - \frac{\sqrt{3}}{72}(y-3)^2 -$
$\frac{\sqrt{3}}{16}(x-1)^3 + \frac{\sqrt{3}}{16}(x-1)^2(y-3) - \frac{\sqrt{3}}{48}(x-1)(y-3)^2 + \frac{\sqrt{3}}{432}(y-3)^3 +$
$\frac{3\sqrt{3}}{128}(x-1)^4 - \frac{\sqrt{3}}{96}(x-1)^3(y-3) - \frac{\sqrt{3}}{192}(x-1)^2(y-3)^2 + \frac{\sqrt{3}}{288}(x-1)(y-3)^3 - \frac{5\sqrt{3}}{10368}(y-3)^4$.

132. a) $x^3+3x^2y^2+y^4=C$; b) $y+xe^{-y}=C$; c) $x^2\cos^2 y+y^2=C$.

133. $xy=C(x+y+1)^3$.

137. $J_f(x)=A$, $J_g(x)=x^{\mathrm{T}}A+x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

138. $f_1(x,y)=x/(x^2+y^2)$, $f_2(x,y)=y/(x^2+y^2)$,
$J_f(x,y)=\dfrac{1}{(x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix} y^2-x^2 & -2xy \\ -2xy & x^2-y^2\end{pmatrix}$, $\det(J_f(x,y))=-\dfrac{1}{(x^2+y^2)^2}$.

142. $x^3+y^3-3xy=0$, $x^2-y\pm(y^2-x)=0$;
$(1.50,1.50)$, $(1.21,0.53)$, $(0.53,1.21)$.

145. $\frac{\partial h}{\partial u}=(\pi\sqrt{3}-6)/(12e)$, $\frac{\partial h}{\partial v}=(\pi+6\sqrt{3})/(12e)$.

152. a) 1, $-\frac{1}{2}-\sqrt{2}$; b) $\frac{17}{8}$, -4; c) $\frac{13}{4}$, $\frac{7}{4}$; d) 2, -3; e) $3a^3$, $-a^3$; f) 8, -8; g) $\frac{3}{2}\sqrt{3}$, 0; h) $2e$, -1; i) 1, -1.

154. $\max V=1/4$; mitat 1, $1/2$, $1/2$.

155. a) Ei ole; b) 1, -1; c) ei ole.

156. $\sqrt{5}$.

158. Maksimi 123, minimi 27.

160. $2x-y-3z=1$.

164. $-14\sqrt{2}\,\mathbf{i}+\sqrt{7}\,\mathbf{j}-7\,\mathbf{k}$.

167. a) $1/56$; b) $1/15120$.

168. $768/13$.

174. a) $-\pi$; b) $-\frac{1}{2}$; c) $-2+\frac{\pi}{4}$.

175. π.

176. $35/192$.

177. $-\frac{8}{3}\mathbf{i}-\frac{56}{3}\mathbf{j}+\frac{32}{5}\mathbf{k}$.

178. a) $\sqrt{2}\pi R^2$; b) $\frac{2\pi}{3}[(1+R^2)^{3/2}-1]$.

179. 136.

184. $J=\frac{4}{9}mR^2$, $r_0=\frac{2}{3}R$.

185. $x_0=\int_\alpha^\beta r(\varphi)\cos\varphi\sqrt{r(\varphi)^2+r'(\varphi)^2}\,d\varphi\ /s$, $y_0=\int_\alpha^\beta r(\varphi)\sin\varphi\sqrt{r(\varphi)^2+r'(\varphi)^2}\,d\varphi\ /s$, missä $s=\int_\alpha^\beta\sqrt{r(\varphi)^2+r'(\varphi)^2}\,d\varphi$.

186. $(2/3,1/4)$.

189. Ei.

190. $\dfrac{1}{2ab}$.

196. $F^{(n)}(s) = (-1)^n \int_0^\infty t^n e^{-st}\,dt,\ s > 0.$

197. $\Gamma(n+1) = n!$.

198. a) 0; b) $e^{xyz}(yz + x^2 z \ln y + x/y + x^3 yz + x^2)$; c) 0.

199. a) $\mathbf{o}$;
b) $e^{xyz}[(x^3z^2 - x^2 y \ln y)\mathbf{i} + (xy - x^2yz^2 - 2xz)\mathbf{j} + (xyz \ln y + \ln y - xz)\mathbf{k}$;
c) $\mathbf{o}$.

200. $\frac{1}{6}$; $\nabla \cdot \mathbf{u} = 2z^2$, $\nabla \times \mathbf{u} = 2z(x\mathbf{j} - y\mathbf{i})$.

201. $p(p+3)r^p$.

205. $u = 2,\ v = 3,\ w = \overline{\arctan}\sqrt{3}$;
$\mathbf{e}_u = \frac{1}{2\sqrt{13}}(3\mathbf{i} + 3\sqrt{3}\mathbf{j} + 4\mathbf{k})$, $\mathbf{e}_v = \frac{1}{\sqrt{13}}(\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j} - 3\mathbf{k})$, $\mathbf{e}_w = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}\mathbf{i} + \mathbf{j})$.

207. $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, $\nabla \times \mathbf{u} = 3\alpha\rho\mathbf{e}_z$, missä α on verrannollisuuskerroin.

208. $\nabla \cdot \mathbf{u} = 1/(r \tan\vartheta)$, $\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{e}_\varphi / r$.

210. $\frac{2}{3}a^3$.

215. π^2.

216. $\frac{3}{4}\pi$.

222. $V(\mathbf{r}) = \frac{1}{6}(3R^2 - r^2)$, jos $r \le R$; $V(\mathbf{r}) = \frac{1}{3}R^3/r$, jos $r \ge R$.

224. Integraali $= 5$; $g(x,y,z) = xyz$.

227. $\mathbf{u} = \frac{3}{4\pi}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\dfrac{\mathbf{r}}{r^5} - \frac{1}{4\pi}\frac{\mathbf{p}}{r^3}$; $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$.

230. Vuo $= 4\pi$; vektoripotentiaali ei ole olemassa.