3. välikokeen mallivastaukset

Harri Hakula

1. Kuvan saat helposti esim. `ParametricPlot[{th*Cos[th],th*Sin[th]}, {th, 0, 2 Pi}]`. Keskiön laskemisessa vaaditut kaavathan ovat muotoa $x_i = \frac{\int_c x_i \, ds}{\int_c ds}$. Muunnetaan polaarikoordinaatteihin ja muistetaan, etta $\int_c ds = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|dt$. Saadaan vaikkapa x-koordinaatille: $x = \frac{\int_0^{2\pi} \phi\cos(\phi)\sqrt{\phi^2+1} \, d\phi}{\int_0^{2\pi} \sqrt{\phi^2+1} \, d\phi}$. Keskiön koordinaatit ovat $(0.6, -1.9)$.

   Arvostelu: Kuva ja arvio: 2p. Parametrisointi, ds, integraalit, lopullinen muoto kukin 1p.

2. Kohdassa a) pitää laskea $\oint bfu \cdot d\mathbf{S}$, kun $\mathbf{u} = r^p\mathbf{r}$ on annettu. Ei muuta kun $d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS = \frac{\mathbf{r}}{r}dS$ ja pallon pinta-ala $4\pi R^2$, niin saadaan helposti $\oint bfu \cdot d\mathbf{S} = R^{p+1} \oint dS = 4\pi R^3$. Gaussin lauseella saadaan b)-kohdassa $\oint bfu \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{u} dV$. Singulariteetteja ei saa olla kentässä, joten päivänvalon kestää vain valinta $p \geq 0$. Loppu on triviaalia: $\nabla \cdot \mathbf{u} = (p+3)r^p$ eli $\int_V \nabla \cdot \mathbf{u} dV = (p+3)\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} r^{p+2} \sin(\theta) dr d\theta d\phi = 4\pi R^3$.

   Arvostelu: a)-kohta 2p, b)-kohta 2p, Gaussin lauseen käyttö 2p.

3. Rajafunktio ei ole jatkuva, vaan kun $x \leq 0,\ f(x) = -\frac{\pi}{2}$, kun $x = 0,\ f(x) = 0$, ja lopulta kun $x \geq 0,\ f(x) = \frac{\pi}{2}$ Suppeneminen ei siis ole tasaista. Kuitenkin annettu integraaliehto pitää paikkaansa. Helpoin tapa laskea $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$ on piirtää kuva. Kummastakin integraalista saadaan vastaukseksi $\frac{\pi}{2}$.

   Arvostelu: Rajafunktio 2p, suppeneminen 2p, integraaliehto 2p.

4. Jaksollisuus: $h(x+2\pi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+2\pi-t)g(t)dt = h(x)$, koska f:n jaksollisuuden perusteella $f(x+2\pi-t) = f(x-t)$. Entä kertoimet e_k? $e_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x)e^{-ikx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{x=-\pi}^{\pi}\{\frac{1}{2\pi}\int_{t=-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)dt\}e^{-ikx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{t=-\pi}^{\pi}\{\frac{1}{2\pi}\int_{x=-\pi}^{\pi} f(x-t)e^{-ik(x-t)}dx\}g(t)e^{-ikt}dt = c_k \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{-ikt}dt = c_k d_k$.

   Arvostelu: Jaksollisuus 2p, kertoimet 4p.