Teknillinen korkeakoulu Kivelä / Mannersalo

Mat-1.312 MATEMATIIKAN PERUSKURSSI T2
Välikoe 3, 7.5.1996

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, välikokeen numero, päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (Ke,Ko,M,Mk,P,R,S,Tf,Ti,Tu);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus.

Tehtävä 1 : *Arkhimedeen spiraalin* napakoordinaattiyhtälö on $r = \varphi$. Homogeeninen rautalanka taivutetaan parametriarvoja $\varphi \in [0, 2\pi]$ vastaavan Arkhimedeen spiraalin muotoon. Esitä, miten voidaan laskea rautalangan keskiö (massakeskipiste) ja muodosta tarvittavat yhden muuttujan integraalit. (Näitä ei tarvitse laskea.) Piirrä kuvio ja arvioi silmämääräisesti keskiön sijainti.

Tehtävä 2 : Tarkastellaan kolmiulotteisen avaruuden vektorikenttää $\mathbf{u} = r^p\mathbf{r}$, missä $\mathbf{r}$ on paikkavektori ja r sen pituus sekä p kokonaisluku. Laske kentän vuo $\oint \mathbf{u}\cdot d\mathbf{S}$ origokeskisen R-säteisen pallon läpi a) pintaintegraalina (jolloin pallon alaa voidaan pitää tunnettuna), b) muuntamalla se ensin Gaussin lauseella avaruusintegraaliksi. Mitä Gaussin lauseen käyttö edellyttää luvusta p?

Tehtävä 3 : Olkoon $f_n(x) = \overline{\text{arc}}\tan nx$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, $x \in \mathbb{R}$. Määritä jonon rajafunktio f ja tutki, onko suppeneminen tasaista. Tutki, päteekö tässä tapauksessa

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

Tehtävä 4 : Olkoot f ja g jatkuvia 2π-jaksoisia funktioita $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joiden eksponenttimuotoisen Fourier'n sarjan kertoimet ovat c_k ja d_k. Näiden funktioiden *konvoluutio* $h = f * g$ määritellään yhtälöllä

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)\,dt.$$

Osoita, että h on 2π-jaksoinen ja sen Fourier'n kertoimet ovat $e_k = c_k d_k$.

Tekniska högskolan Kivelä / Mannersalo

Mat-1.312 GRUNDKURS I MATEMATIK T2
Mellanförhör 3, 7.5.1996

Skriv tydligt på varje provpapper på skilda rader:
1) studieperiodens namn, mellanförhörets nummer, datum;
2) studentnummer+bokstav, TEXTAT släktnamnet understreckat, alla förnamn;
3) utbildningsprogram (Ke,Ko,M,Mk,P,R,S,Tf,Ti,Tu);
4) eventuella tidigare namn och utbildningsprogram;
5) namnteckning.

Uppgift 1 : *Archimedes' spiral* har ekvationen $r = \varphi$ i polära koordinater. En homogen järntråd böjs så att den får formen av Archimedes' spiral för parametervärdena $\varphi \in [0, 2\pi]$. Ange, hur järntrådens tyngdpunkt (masscentrum) kan beräknas och bilda de nödvändiga integralerna av en variabel. (Dessa behöver inte beräknas.) Rita en figur och uppskatta tyngdpunktens position med ögonmått.

Uppgift 2 : Vi undersöker vektorfältet $\mathbf{u} = r^p \mathbf{r}$ i det tredimensionella rummet, där $\mathbf{r}$ är positionsvektorn, r dess längd och p ett heltal. Beräkna fältets flöde $\oint \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}$ genom en sfär med radien R och mittpunkten i origo a) som en ytintegral (varvid sfärens area får anses vara känd), b) genom att först omvandla den till en rymdintegral med hjälp av Gauss' sats. Vad förutsätter användandet av Gauss' sats av talet p?

Uppgift 3 : Låt $f_n(x) = \overline{\arctan}\, nx$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, $x \in \mathbb{R}$. Bestäm följdens gränsfunktion f och undersök, huruvida konvergensen är likformig. Undersök huruvida det i detta fall gäller att

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = \int_0^1 \lim_{n \to \infty} f_n(x)\, dx.$$

Uppgift 4 : Låt f och g vara kontinuerliga 2π-periodiska funktioner $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, vilka har koefficienterna c_k respektive d_k för Fourier-serien på exponentialform. Dessa funktioners *konvoluta* (*konvolution*, *faltning*) $h = f * g$ definieras med hjälp av ekvationen

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x - t) g(t)\, dt.$$

Visa, att h är 2π-periodisk och att dess Fourier-koefficienter är $e_k = c_k d_k$.