T2:n toisen välikokeen mallivastaukset

Tehtävä 1 Nyt siis $f(x,y,z) = f(x,y,g(x,y)) = 0$, joten osittaisderivoimalla tämä x:n suhteen saadaan $f_x + f_z g_x = 0$ ja $f_y + f_z g_y = 0$ eli $g_x = -f_x/f_z$ ja $g_y = -f_y/f_z$. Osittaisderivoidaan sitten $f_y + f_z g_y = 0$ puolestaan x:n suhteen, jolloin

$$f_{yx} + f_{yz} g_x + f_{zx} g_y + f_{zz} g_x g_y + f_z g_{yx} = 0,$$

josta ratkaisemalla g_{yx} saadaan

$$g_{yx} = -(f_{yx} + f_{yz} g_x + f_{zx} g_y + f_{zz} g_x g_y)/f_z =$$

$$= -(f_{yx} f_z f_z - f_{yz} f_x f_z - f_{zx} f_y f_z + f_{zz} f_x f_y)/f_z^3.$$

Tapauksessa $f(x,y,z) = xy - z^2$ olkoon $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ sellainen, että $f(x_0, y_0, z_0) = 0$, eli jotta implisiittifunktiolauseen oletukset täyttyisivät, niin välttämätön ehto on siis $f_z(x_0, y_0, z_0) = 2z_0 \neq 0$. Tarvittavat osittaisderivaatat ovat

$$f_x = y, f_y = x, f_z = -2z, f_{yx} = 1, f_{zx} = f_{yz} = 0 \text{ ja } f_{zz} = -2,$$

eli $g_{yx}(x_0, y_0) = (4z_0^2 - 2y_0 x_0)/8z_0^3$. (Nyt kun ratkaistaistaan g, niin huomatkaa, että jos se laitetaan saatuun kaavaan, niin $g_{yx}(x_0, y_0) = \pm 1/(4\sqrt{x_0 y_0})$).

Ratkaistaan sitten se g suoraan: $f(x,y,z) = 0$, eli $z^2 = xy$, joka voi toteutua vain jos ollaan xy-tason ensimmäisessä tai kolmannessa neljänneksessä. Tällöin kaksi ratkaisua, $g_1(x,y) = \sqrt{xy}$ tai $g_2(x,y) = -\sqrt{xy}$ ja siten halutut osittaisderivaatat ovat $(g_1)_{yx} = (xy)^{-1/2}/4$ ja $(g_2)_{yx} = -(g_1)_{xy}$.

Tehtävä 2 Nyt siis $p' = p + t(K - p)$, missä $p = (x, y, 0) \to (x', 0, z')$. Tällöin y-komponentista $0 = y + t(K_y - y)$ saadaan $t = y/(y+1)$, joten

$$\begin{cases} x' = x - xy/(y+1) = x/(y+1) \\ y' = 0 \\ z' = 10y/(y+1) \end{cases}$$

ovat komponenttifunktiot. Asettamalla $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ siten, että $F(x,y) = (x/(y+1), 10y/(y+1))$, saadaan laskemalla tämän Jakobiaanista suurennussuhde: $\det JF(x,y) = 10/(1+y)^3$. Sitten lopuksi pitää vielä piirtää pisteet $(0, 0, 20n/(2n+1))$, kun $n = 0, 1, ..., 5$.

Tehtävä 3 Nyt kun $f(x,y) = x^2 + y^2$ ja $g(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2 - 1$, niin Lagrangen side-ehto saa muodon

$$\begin{cases} 2x = \lambda(2x + 2y) \\ 2y = \lambda(2x + 6y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

eli ensimmäisestä yhtälöstä, kun $x + y \neq 0$, saadaan $\lambda = x/(x+y)$. Sijoittamalla tämä toiseen yhtälöön saadaan $y = x(x+3y)/(x+y)$, eli $x^2 + 2xy = y^2$. Sijoitetaan tämä ehtoon $g(x,y) = 0$, jolloin saadaan $y^2 + 3y^2 - 1 = 0$, josta $y = \pm 1/2$. Kun $y = 1/2$, niin $x = (-1 \pm \sqrt{2})/2$ ja kun $y = 1/2$, niin $x = (-1 \pm \sqrt{2})/2$. Lopulta sitten sijotuksella maksimi

$$f((-1-\sqrt{2})/2, 1/2) = f((1+\sqrt{2})/2, -1/2) = 1 + \sqrt{2}/2$$

ja minimi

$$f((-1+\sqrt{2})/2, 1/2) = f((1-\sqrt{2})/2, -1/2) = 1 - \sqrt{2}/2.$$

Tarkastetaan vielä tapaus $x = -y$, jolloin ehdosta $g(x,y) = 0$ tulee $x = \pm 1/\sqrt{2}$ eli sijoitus antaa $f(\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2}) = 1$, eikä siis ole ääriarvo.

Tehtävä 4 Keskietäisyyden kaavaan sijoittamalla saadaan

$$\frac{1}{v(B)} \int_B |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| dv =$$

$$= \frac{1}{4/3\pi R^3} \int_{-R}^{R} \int_{-\sqrt{r^2-z^2}}^{\sqrt{r^2-z^2}} \int_{-\sqrt{r^2-y^2-z^2}}^{\sqrt{r^2-y^2-z^2}} \sqrt{x^2 + y^2 + (z-c)^2} dz dy dx =$$

$$= \frac{3}{4\pi R^3} \int_{r=0}^{R} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sqrt{r^2 \sin^2 \vartheta + (r\cos\vartheta - c)^2} r^2 \sin\vartheta d\varphi d\vartheta dr =$$

$$= \frac{3}{2R^3} \int_{r=0}^{R} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \sqrt{r^2 - 2rc\cos\vartheta + c^2} r^2 \sin\vartheta d\vartheta dr.$$