Teknillinen korkeakoulu Kivelä / Mannersalo

Mat-1.312 MATEMATIIKAN PERUSKURSSI T2
Välikoe 2, 26.3.1996

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, välikokeen numero, päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (Ke,Ko,M,Mk,P,R,S,Tf,Ti,Tu);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus.

Tehtävä 1 : Oletetaan, että funktio $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ täyttää tarkastelupisteessä implisiittifunktiolauseen ehdot siten, että yhtälö $f(x,y,z) = 0$ määrittää funktion $z = g(x,y)$. Lausu funktion g toisen kertaluvun sekaderivaatta funktion f osittaisderivaattojen avulla. Sovella tulosta tapaukseen $f(x,y,z) = xy - z^2$ ja laske sekaderivaatta sekä johtamasi kaavan avulla että määrittämällä ensin funktion g lauseke.

Tehtävä 2 : Kolmiulotteisen avaruuden xy-taso projisioidaan xz-tasoon (kuvatasoon) keskusprojektiokuvauksella, jonka projektiokeskuksena on piste $K \mathrel{\widehat{=}} (0,-1,10)$. (Keskusprojektiossa piste P projisioidaan siten, että projektiokeskuksen K ja projisioitavan pisteen P kautta asetetaan suora KP; tämän ja kuvatason leikkauspiste on projektiopiste P'.) Muodosta kuvauksen komponenttifunktiot ja laske sen paikallinen (pinta-ala)suurennus. Piirrä kuvio, joka osoittaa, mille pisteille y-akselin pisteet $(0, 2n)$, $n = 0, 1, \ldots, 5$, kuvautuvat.

Tehtävä 3 : Määritä funktion $f(x,y) = x^2 + y^2$ suurin ja pienin arvo käyrällä $x^2 + 2xy + 3y^2 = 1$.

Tehtävä 4 : Pisteen $P_0 \mathrel{\widehat{=}} \mathbf{r}_0$ keskietäisyys kappaleen B pisteistä on integraali

$$\frac{1}{v(B)} \int_B |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|\, dv,$$

missä $v(B)$ tarkoittaa kappaleen tilavuutta ja $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ on paikkavektori, jonka komponentit ovat integroimismuuttujat. Muodosta integraali, joka esittää pisteen $(0,0,c)$ keskietäisyyttä R-säteisestä origokeskisestä pallosta, kun $c > R$. Saata integraali sellaiseen — mahdollisimman yksinkertaiseen — muotoon, että se voidaan laskea perättäisinä yhden muuttujan integrointeina esimerkiksi Mathematicalla.

Tekniska högskolan Kivelä / Mannersalo

Mat-1.312 GRUNDKURS I MATEMATIK T2
Mellanförhör 2, 26.3.1996

Skriv tydligt på varje provpapper på skilda rader:
1) studieperiodens namn, mellanförhörets nummer, datum;
2) studentnummer+bokstav, TEXTAT släktnamnet understreckat, alla förnamn;
3) utbildningsprogram (Ke,Ko,M,Mk,P,R,S,Tf,Ti,Tu);
4) eventuella tidigare namn och utbildningsprogram;
5) namnteckning.

Uppgift 1 : Vi antar, att funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uppfyller i en punkt implicita funktionssatsens villkor så, att ekvationen $f(x, y, z) = 0$ bestämmer en funktion $z = g(x, y)$. Uttryck funktionens g blandade derivata av andra ordningen med hjälp av funktionens f partiella derivator. Tillämpa resultatet på funktionen $f(x, y, z) = xy - z^2$ och beräkna den blandade derivatan både med din nyss härledda formel och genom att först bestämma funktionens g uttryck.

Uppgift 2 : Den tredimensionella rymdens xy-plan projicieras på xz-planet (bildplanet) medelst en centralprojektion med projektionscentrum $K \mathrel{\widehat{=}} (0, -1, 10)$. (Vid en centralprojektion projicieras en punkt P så, att den räta linjen KP drages genom projektionscentret K och punkten P; projektionspunkten P' är den räta linjens och bildplanets skärningspunkt.) Bilda avbildningens komponentfunktioner och beräkna dess lokala (area-)förstoring. Rita en bild, som visar till vilka punkter y-axelns punkter $(0, 2n)$, $n = 0, 1, \ldots, 5$, avbildas.

Uppgift 3 : Bestäm funktionens $f(x, y) = x^2 + y^2$ största och minsta värde på kurvan $x^2 + 2xy + 3y^2 = 1$.

Uppgift 4 : Punktens $P_0 \mathrel{\widehat{=}} \mathbf{r}_0$ medelavstånd till kroppens B punkter är integralen

$$\frac{1}{v(B)} \int_B |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \, dv,$$

där $v(B)$ betecknar kroppens volym och $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ är ortsvektorn, vars komponenter utgörs av integrationsvariablerna. Bilda den integral, som framställer punktens $(0, 0, c)$ medelavstånd till ett klot med radien R och mittpunkten i origo. Vi antar, att $c > R$. Framställ integralen i en sådan — möjligast enkel — form, att den kan beräknas med successiva integrationer med avseende på en variabel till exempel med Mathematica.