Mat-1.312 Matematiikan peruskurssi T2
Välikoe 1, 27.2.1996
Ratkaisut (PM)

1. Yhtälöä, joka määrittelee ympyrän, jonka keskipiste on x–akselilla, derivoidaan kahdesti implisiittisesti x:n suhteen ($y \to y(x)$):

$$\frac{d^2}{dx^2} \quad (x-x_0)^2 + y^2 = R^2 \quad \Rightarrow \quad 2 + 2y'(x)^2 + 2y(x)y''(x) = 0$$

   Tällä ympyräparvella ei ole kohtisuorien leikkaajien parvea, koska jokaisen $\mathcal{R}^2$:n pisteen kautta kulkee useita ympyröitä, joilla kaikilla on eri kohtisuora leikkaaja.

2. Lineaarinen 2. kertaluvun differentiaaliyhtälö:

$$P(x)\,\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\,\frac{dy}{dx} + R(x)y = b(x) \quad \forall\, x \in I,$$

   missä P, Q, R ja b ovat muuten mielivaltaisia funktioita paitsi $P \not\equiv 0$.

   – Yleinen ratkaisu koostuu homogeenisen yhtälön ($P\,y'' + Q\,y' + R\,y = 0$) lineaarisesti riippumattomien ratkaisuiden lineaarikombinaatioista ($C_1\,y_1 + C_2\,y_2$) ja täydellisen yhtälön jostakin yksityisratkaisusta (y_0)

$$y(x) = C_1\,y_1(x) + C_2\,y_2(x) + y_0(x).$$

   – Jos emme tiedä yhtälön ratkaisuista emmekä funktioista P, Q, R ja b mitään, niin ei ole olemassa mitään interointikvadratuuria, jolla saataisiin yleinen ratkaisu annetulle yhtälle.

   – Jos toinen homogeenisen yhtälön ratkaisuista tiedetään, toinen ratkaisu saadaan yritteellä

$$y_2(x) = u(x)\,y_1(x).$$

   Kyseinen yrite johtaa differentiaaliyhtälöön, joka voidaan aina ratkaista (integraalimuodossa).

   – Jos molemmat homogeeniyhtälön ratkaisut on tunnettuja, yleinen ratkaisu saadaan kahdella lisäkvadratuurilla sijoittamalla täydelliseen yhtälöön yrite

$$y(x) = C_1(x)\,y_1(x) + C_2(x)\,y_2(x).$$

   Samoin kuin edellisessä tapauksessa päädytään differentiaaliyhtälöihin, jotka voidaan ratkaista integraalimuodossa.

3. Eliminoidaan $x(t)$ ja $x'(t)$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x+2y \\ y' & = & -2x+y \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} x(0) & = & 2 \\ y(0) & = & 3 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{1}{2}(y-y') \\ y'' & = & -2x'+y' \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad y''-2y'+5y=0$$

Yrite: $y(x)=e^{\lambda t}$

$$\lambda^2-2\lambda+5=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1 \pm 2i$$

$$\Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcl} y & = & e^t\,(C_1\,\cos 2t + C_2\,\sin 2t) \\ x & = & \frac{1}{2}(y-y') = e^t\,(-C_2\,\cos 2t + C_1\,\sin 2t) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(0) & = & 2 \\ y(0) & = & 3 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcl} x & = & e^t\,(2\cos 2t + 3\sin 2t) \\ y & = & e^t\,(3\cos 2t - 2\sin 2t) \end{array}\right.$$

4. Normaaliryhmä saadaan ottamalla käyttöön apumuuttuja z:

$$x''-x\,y=0 \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcl} y' & = & z \\ z' & = & xy \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} y(0) & = & 1 \\ z(0) & = & 0 \end{array}\right.$$

Merkintöjä:

$$Y(x)=\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \qquad f(x,Y)=\begin{pmatrix} z \\ xy \end{pmatrix} \qquad Y_k=Y(x_k)$$

Edellisiä merkintöjä käyttäen yhtälönä on $Y'(x)=f(x,Y)$. Ratkaistaan tämä numeerisesti Eulerin menetelmällä:

$$Y_{k+1}=Y_k+h\,f(x,Y_k)=\begin{pmatrix} y(x_k) \\ z(x_k) \end{pmatrix}+h\begin{pmatrix} z(x_k) \\ x_k\,y(x_k) \end{pmatrix},$$

missä h on askelpituus. Sijoitetaan $h=0.25$, jolloin saadaan

$$Y_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+0.25\begin{pmatrix} 0 \\ 0\cdot 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Y_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+0.25\begin{pmatrix} 0 \\ 0.25\cdot 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0.0625 \end{pmatrix}$$

$$Y_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 0.0625 \end{pmatrix}+0.25\begin{pmatrix} 0.0625 \\ 0.5\cdot 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1.01563 \\ 0.1875 \end{pmatrix}$$

$$Y_4=\begin{pmatrix} 1.01563 \\ 0.1875 \end{pmatrix}+0.25\begin{pmatrix} 0.1875 \\ 0.75\cdot 1.01583 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1.0625 \\ 0.37793 \end{pmatrix}$$

Saadaan siis $y(1)\approx 1.0625$