Teknillinen korkeakoulu Kivelä / Nurmiainen

Mat-1.312 MATEMATIIKAN PERUSKURSSI T2
Tentti, 4.11.1996

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (AUT, TFY, TIK, TUO, SÄH, KON, KEM, MAK, PUU, MAA, RYK);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus.

Tentti kestää neljä tuntia.

Tehtävä 1 : Etsi differentiaaliyhtälön $(1-2x)y'' + 2y' + (2x-3)y = 0$ yleinen ratkaisu, kun tiedetään, että eräänä yksityisratkaisuna on yksinkertainen alkeisfunktio.

Tehtävä 2 : Millaiset pisteessä x_0 muodostetut alkuehdot on annettava, jotta differentiaaliyhtälön $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ ratkaisu voisi tulla yksikäsitteisesti määrätyksi? Selosta, miten tällainen alkuarvoprobleema voidaan ratkaista numeerisesti jollakin yksinkertaisella menetelmällä, esimerkiksi Eulerin menetelmällä.

Tehtävä 3 : Muodosta toista astetta oleva Taylorin polynomi kehityskeskuksena origo funktiolle $f(x, y, z) = e^{xy+yz+zx}$. Määritä funktion toisen kertaluvun osittaisderivaattojen muodostama Hessen matriisi origossa. Miten tämä liittyy Taylorin polynomiin?

Tehtävä 4 : Pallokoordinaattiyhtälö $r = \sin(\vartheta)\sin(\varphi/2)$ määrittää erään suljetun pinnan. Esitä tämän rajoittaman alueen tilavuus mahdollisimman yksinkertaisessa muodossa; laske tulos, jos se kohtuullisin ponnistuksin on mahdollista.

Tehtävä 5 : Esitä Stokesin lause. Laske tämän avulla viivaintegraali $\int_c \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r}$, missä $\mathbf{u}(x, y, z) = z\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$ ja c on pinnanpalan $z = xy$, $|x| \le 1$, $|y| \le 1$ reuna.

Tehtävä 6 : Tutki, millä reaalimuuttujan x arvoilla sarjat

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-kx} \quad \text{ja} \quad \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-kx}$$

suppenevat ja määritä niiden summat.