Teknillinen korkeakoulu Kivelä / Nurmiainen

Mat-1.312 MATEMATIIKAN PERUSKURSSI T2
Tentti, 5.9.1996

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (Ke,Ko,M,Mk,P,R,S,Tf,Ti,Tu);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus.

Tentti kestää neljä tuntia.

Tehtävä 1 : Muodosta lineaarinen homogeeninen toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö, jolla on ratkaisuina $y = e^x$ ja $y = x$. Mikä on yhtälön yleinen ratkaisu? Perustelut.

Tehtävä 2 : Selosta, miten voidaan määrittää differentioituvan funktion $f(x, y, z)$ maksimi ja minimi yksikköpallossa $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Esitä menettely sellaisessa muodossa, että se kelpaa ohjeeksi käytettäessä laskentaan esimerkiksi Mathematicaa.

Tehtävä 3 : Pallokoordinaattiyhtälö $r = \sin(\vartheta)\sin(\varphi/2)$ määrittää erään suljetun pinnan. Esitä tämän rajoittaman alueen tilavuus mahdollisimman yksinkertaisessa muodossa; laske tulos, jos se kohtuullisin ponnistuksin on mahdollista.

Tehtävä 4 : Olkoon B pinnanpala $z = 1 - x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 \leq 1$ ja c tämän reunakäyrä. Olkoon edelleen $\mathbf{n}$ pinnan yksikkönormaalivektori ja $\mathbf{t}$ reunakäyrän yksikkötangenttivektori. Formuloi Stokesin lause ja osoita sen avulla, että integraaleista

$$\int_B \mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS \quad \text{ja} \quad \oint_c \mathbf{t} \cdot d\mathbf{r}$$

toinen on kaksi kertaa niin suuri kuin toinen, kun vektoreiden $\mathbf{n}$ ja $\mathbf{t}$ suunnat valitaan sopivasti. Laske integraalien arvot. (Vektori $\mathbf{k}$ on tavalliseen tapaan z-akselin suuntainen yksikkövektori.)

Tehtävä 5 : Eksponenttifunktio $E(x)$ määriteltäköön potenssisarjalla:

$$E(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Osoita, että sarja suppenee kaikilla muuttujan x arvoilla ja siis todellakin määrittelee funktion $E(x)$. Määrittele kahden sarjan Cauchyn tulo ja osoita tätä käyttäen, että funktiolla on ominaisuus $E(x)E(-x) = 1$.

Tehtävä 6 : Osoita, että trigonometrinen sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}$$

suppenee tasaisesti koko reaaliakselilla. Päättele tämän perusteella, että on olemassa jatkuva funktio, jonka Fourier'n sarja on kyseessä.