Teknillinen korkeakoulu Kivelä / Mannersalo

Mat-1.312 MATEMATIIKAN PERUSKURSSI T2
Tentti, 5.8.1996

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (Ke,Ko,M,Mk,P,R,S,Tf,Ti,Tu);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus.

Tentti kestää neljä tuntia.

Tehtävä 1 : Etsi differentiaaliyhtälön $y'' + y = \sin x$ yleinen ratkaisu.

Tehtävä 2 : Harmonisen värähtelijän differentiaaliyhtälö on $y'' + ky = 0$, missä $k > 0$ on vakio. Muodosta yhtälöä vastaava normaaliryhmä. Muodosta tämän avulla differentiaaliyhtälö faasitasossa esitetyille ratkaisukäyrille ja ratkaise se. Millaiset käyrät ovat kyseessä? Selosta, miksi yhtälö on autonominen.

Tehtävä 3 : Millä luvun p reaaliarvoilla kahden muuttujan funktion

$$f(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^p}$$

arvo origossa voidaan määritellä siten, että funktiosta tulee jatkuva? Millä luvun p reaaliarvoilla funktion kuvaajana olevalla pinnalla $z = f(x,y)$ on tangenttitaso origossa? Mitä tekemistä em. asioilla on funktion derivoituvuuden ja differentioituvuuden kanssa?

Tehtävä 4 : Oletetaan, että yhtälö $F(x,y,z) = 0$ määrittää tarkastelupisteen (x_0, y_0, z_0) eräässä ympäristössä funktiot $x = x(y,z)$, $y = y(z,x)$ ja $z = z(x,y)$. Todista termodynamiikassa tarvittava yhtälö

$$\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = -1.$$

Tehtävä 5 : Ruuvipinnan palan parametriesitys on

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = v; \quad u \in [0,1], \quad v \in [0, 2\pi].$$

Muodosta integraali, joka esittää pinnanpalan pinta-alaa, ja laske se niin pitkälle, kuin kohtuullisin ponnistuksin on mahdollista.

Tehtävä 6 : Funktio f_n on 2π-jaksoinen. Funktion arvo jakson pituisella välillä $[-\pi, \pi]$ on $n/2$, jos $x \in [-1/n, 1/n]$, muutoin 0. Määritä funktion trigonometrinen Fourier'n sarja. Miten tämän kertoimet käyttäytyvät, kun $n \to \infty$? Esitä hypoteesi rajaprosessilla saatavan sarjan suppenemisesta. Miten hypoteesin voisi yrittää todistaa?