Teknillinen korkeakoulu   Kivelä / Mannersalo

Mat-1.312 MATEMATIIKAN PERUSKURSSI T2
Tentti,   23.5.1996

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (Ke,Ko,M,Mk,P,R,S,Tf,Ti,Tu);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus.

Tentti kestää neljä tuntia.

Tehtävä 1 : Tutki, millä reaalisten vakioiden a ja b arvoilla differentiaaliyhtälön $y'' + ay' + by = 0$ kaikki ratkaisut $y(x)$ a) ovat jaksollisia, b) lähestyvät nollaa, kun $x \to \infty$.

Tehtävä 2 : Määrittele, mitä tarkoitetaan kahden reaalimuuttujan reaaliarvoisen funktion $f(x, y)$ a) derivoituvuudella, b) differentioituvuudella. Tarkastele esimerkkinä funktion

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \ (x, y) \neq (0, 0), \qquad f(0, 0) = 0$$

derivoituvuutta ja differentioituvuutta origossa.

Tehtävä 3 : Olkoon $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^3y + 2y^3z + 3z^3x$. Määritä pinnan $f(x, y, z) = 0$ pisteeseen $(1, -1, 1)$ asetetun tangenttitason yhtälö. Määritä kaksi lineaarisesti riippumatonta tangenttitason suuntaista vektoria ja laske funktion f suunnatut derivaatat näiden suuntaan em. pisteessä.

Tehtävä 4 : Tutki, suppeneeko avaruuden $\mathbb{R}^3$ yli muodostettu epäoleellinen integraali

$$\int \frac{dv}{1 + x^2 + y^2 + z^2}.$$

Tehtävä 5 : Oletetaan, että kolmiulotteisen avaruuden vektorikenttä $\mathbf{u} = \mathbf{r}/r^3$ voidaan esittää vektorikentän $\mathbf{A}$ roottorina: $\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{A}$. Laske kentän vuo $\int_B \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}$ origokeskisen R-säteisen puolipallon yli, kun puolipallo on xy-tason a) yläpuolella, b) alapuolella. Muunna kumpikin vuointegraali Stokesin lauseen avulla vektorikentän $\mathbf{A}$ käyräintegraaliksi. Jos vuointegraalit ja toisaalta käyräintegraalit lasketaan yhteen saadaan ristiriitainen tulos; millainen? Mitä tämä ristiriita merkitsee?

Tehtävä 6 : Määrittele, mitä tarkoitetaan sarjan tasaisella suppenemisella. Esitä esimerkki sarjasta, joka suppenee, mutta ei suppene tasaisesti. Perustele esimerkkisi.

Tekniska högskolan Kivelä / Mannersalo

Mat-1.312 GRUNDKURS I MATEMATIK T2
Tentamen, 23.5.1996

Skriv tydligt på varje provpapper på skilda rader:
1) studieperiodens namn, datum;
2) studentnummer+bokstav, TEXTAT släktnamnet understreckat, alla förnamn;
3) utbildningsprogram (Ke,Ko,M,Mk,P,R,S,Tf,Ti,Tu);
4) eventuella tidigare namn och utbildningsprogram;
5) namnteckning.

Tentamen varar fyra timmar.

Uppgift 1 : Undersök, för vilka värden på de reella konstanterna a och b kommer alla lösningarna $y(x)$ till differentialekvationen $y'' + ay' + by = 0$ a) att vara periodiska, b) att gå mot noll, då $x \to \infty$.

Uppgift 2 : Definiera, vad som menas med att en reellvärd funktion $f(x, y)$ av två reella variabler är a) deriverbar, b) differentierbar. Undersök som ett exempel funktionens

$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \ (x,y) \neq (0,0), \qquad f(0,0) = 0$$

deriverbarhet och differentierbarhet i origo.

Uppgift 3 : Låt $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^3y + 2y^3z + 3z^3x$. Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan $f(x, y, z) = 0$ i punkten $(1, -1, 1)$. Bestäm två linjärt oberoende vektorer i tangentplanet och beräkna funktionens f riktade derivata i dessa riktningar i punkten i fråga.

Uppgift 4 : Undersök huruvida den generaliserade integralen

$$\int \frac{dv}{1+x^2+y^2+z^2}.$$

konvergerar, då man integrerar över rummet $\mathbb{R}^3$.

Uppgift 5 : Antag, att vektorfältet $\mathbf{u} = \mathbf{r}/r^3$ i det tredimensionella rummet kan ges som rotationen av vektorfältet $\mathbf{A}$: $\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{A}$. Beräkna fältets flöde $\int_B \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}$ genom en halvsfär med radien R och mittpunkten i origo, då halvsfären är a) ovanför xy-planet, b) under xy-planet. Omvandla i bägge fallen flödesintegralen till en kurvintegral av vektorfältet $\mathbf{A}$ med hjälp av Stokes' sats. Då å ena sidan flödesintegralerna och å andra sidan kurvintegralerna adderas, fås ett motsägelsefullt resultat; vilket? Vad innebär denna motsägelse?

Uppgift 6 : Definiera vad som menas med likformig konvergens hos en serie. Ge exempel på en serie, som konvergerar, men inte likformigt. Motivera exemplet.