Teknillinen korkeakoulu Kivelä / Mannersalo

Mat-1.202 MATEMATIIKAN PERUSKURSSI T II
Tentti, 16.1.1996

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (Ke,Ko,M,Mk,P,R,S,Tf,Ti,Tu);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus.

Tentti kestää neljä tuntia.

Tehtävä 1 : Selosta, mitä tarkoitetaan (kertalukua n olevalla) lineaarisella differentiaaliyhtälöllä. Millainen on tämän ratkaisujoukon rakenne? Mitä voidaan sanoa yleisessä tapauksessa (jolloin kerroinfunktioilta vaaditaan ainoastaan jatkuvuus) yhtälön ratkaisemisesta integrointien avulla? Käsittele erityisesti tapaukset $n = 1$ ja $n = 2$.

Tehtävä 2 : Määritä käyräparven $y = Cx^b$ kohtisuorat leikkaajat; C on parven parametri, b vakio. Mistä käyristä on kyse tapauksissa $b = 1$ ja $b = 2$?

Tehtävä 3 : Osoita oikeaksi tai vääräksi seuraavat sarjoja koskevat väitteet: a) Jos $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee, niin myös $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + a_k^2)$ suppenee. b) Jos $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ suppenee, niin myös $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + a_k^2)$ suppenee.

Tehtävä 4 : Olkoot f ja g kahdesti jatkuvasti derivoituvia funktioita $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Määritä vakiot a ja k siten, että funktio $u(x, y) = xf(x + ay) + yg(x + ay)$ toteuttaa osittaisdifferentiaaliyhtälön

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$$

Tehtävä 5 : Oletetaan, että yhtälö $F(x, y, z) = 0$ määrittää tarkastelupisteen (x_0, y_0, z_0) eräässä ympäristössä funktiot $x = x(y, z)$, $y = y(z, x)$ ja $z = z(x, y)$. Todista termodynamiikassa tarvittava yhtälö

$$\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = -1.$$

Tehtävä 6 : Määrittele vektorikentän vuo pinnanpalan läpi. Laske vektorikentän $\mathbf{u}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ vuo kuution

$$\{\,(x, y, z) \mid |x| \le 1,\ |y| \le 1,\ |z| \le 1\,\}$$

pinnan läpi a) pintaintegraalina, b) avaruusintegraalina.